

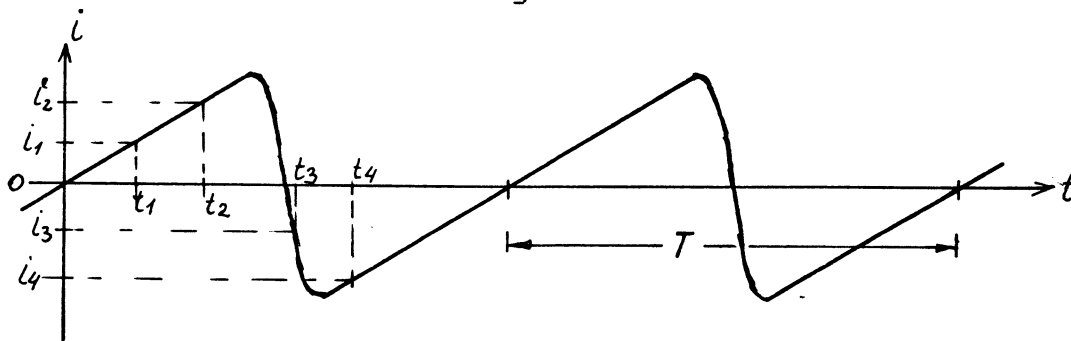
EMNELISTE

Vekselstrøm  
Øjebliksværdier  
Vekselspænding  
Periodiske og aperiodiske vekselstrømme og vekselspændinger  
Periodetid  
Frekvens  
Sammensatte strømme og spændinger  
Måleværdier: Spids-, middel- og effektiv-værdi  
Formfaktor, topfaktor  
Sinusformet strøm og spænding  
Vinkelhastighed,  
Elektromagnetisk felt  
Bølgelængde  
Fourier-rækker, harmoniske  
Konstanter for sinusformede spændinger  
Kondensator ved sinus-spænding  
Vektor-repræsentation af sinusspænding  
Faseforskydning  
Spole ved sinusstrøm  
Impedans,  $Z$   
Vektordiagram  
Reaktans,  $X$   
Godhed, tabsfaktor  
Effektafsættelse i en impedans  
Impedanstilpasning  
Admittans,  $Y$   
Susceptans,  $B$   
Omregning mellem admittans og impedans  
Resonanskredse  
Resonansfrekvens  
Kredsgodhed  
Båndbredde  
Praktiske størrelsesordener  
Resonanstransformator  
Resonanskredse i tidsdomænet  
Dæmpet svingning, ringning

Definition:

En vekselstrøm er en strøm, som skifter retning og størrelse (alternating current, ac). En jævnstrøm (direct current, dc) kan beskrives fuldstændigt med et fortegn og en talværdi. En vekselstrøm kan i de mere enkle tilfælde beskrives som en matematisk funktion af tiden og med en graf, der afbilder funktionen:

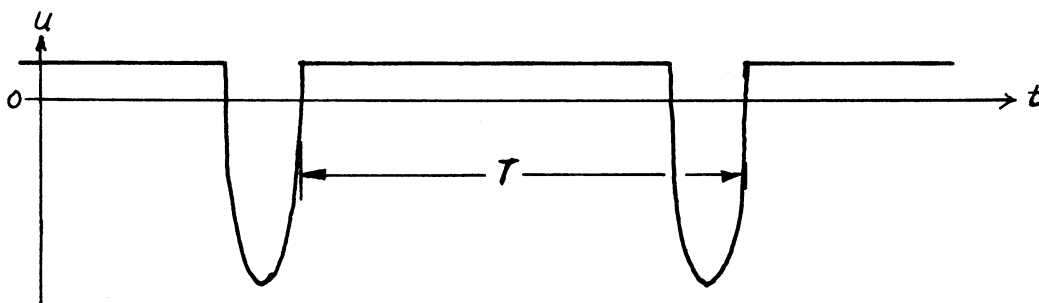
fig 5.01



Her betegner  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  og  $i_4$  øjebliksværdierne af strømmen i til tiderne  $t_1$  - -  $t_4$ .

Tilsvarende gælder for vekselspændinger, at det er spændinger, som veksler i polaritet og størrelse:

fig 5.02



Vi skelner mellem periodiske vekselstrømme og -spændinger og aperiodiske.

De 2 grafer viser begge periodiske forløb: En regelmæssig gentagelse af forløbet. Den tid, det tager inden samme følge af øjebliksværdier gentager sig, kaldes periodetiden  $T$  og måles i sekunder. Det periodiske forløb kan skrives:

$$u(t) = u(t + T) = u(t + 2T) = u(t + 3T) = u(t + p \cdot T)$$

hvor  $p$  er et vilkårligt helt tal.

Frekvens:

Reciprokverdien af periodetiden kaldes frekvensen (hyppigheden) og angiver, hvor tit forløbet gentager sig. Altså hvor mange perioder, strømmen eller spændingen gennemløber hvert sekund:

$$f = \frac{1}{T} \text{ [perioder/sekund = cycles/second = Hertz, Hz]}$$

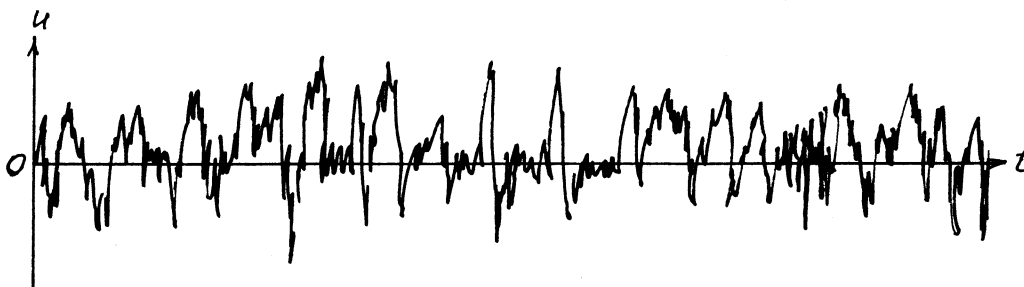
Nogle typiske kilder til periodiske vekselstrømme og -spændinger er:

Det offentlige lysnet, laboratoriegeneratorer, tv- og radiosenders bæreølger og synkroniseringssignaler, interferens (forstyrrelser) fra computere i hvile.

Nogle kilder til aperiodiske vekselstrømme og -spændinger er:

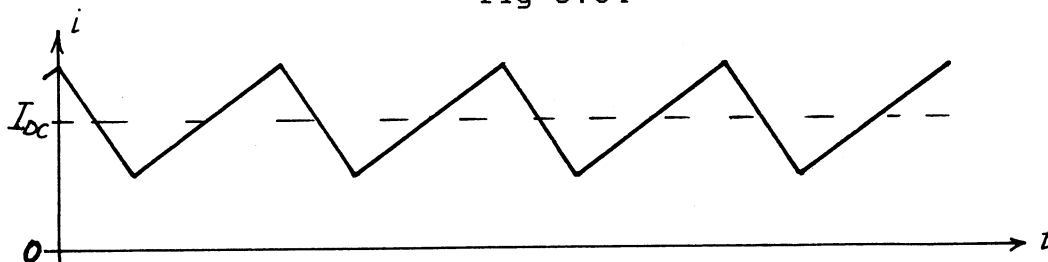
Audio- og videosignaler, radio-astronomiske signaler, elektrisk støj (ikke at forveksle med interferens, som ofte er periodisk).

fig 5.03

Sammensatte strømme og spændinger:

En strøm kan være sammensat af jævnstrøm og vekselstrøm. Hvis dens retning (polaritet) er konstant, kaldes den en jævnstrøm overlejret med vekselstrøm:

fig 5.04

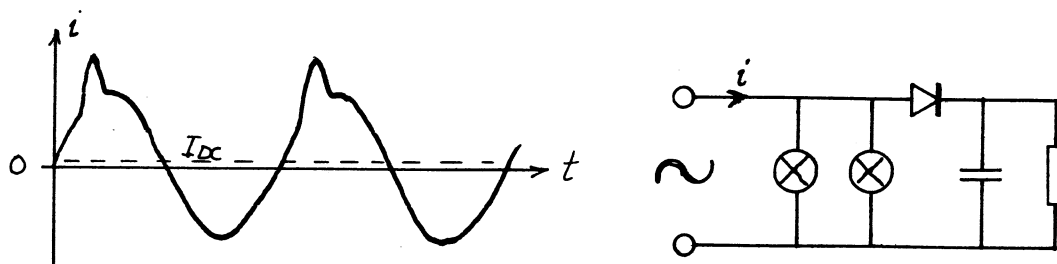


Sådan en strøm kan man for eksempel komme ud for i forstærkertrin, hvor collector- eller drainstrøm er en jævnstrøm.

Når trinet påtrykkes et indgangs-signal, vil denne jævnstrøm blive overlejret med en vekselstrøm, som repræsenterer det forstærkede signal. En jævnstrøm overlejret med vekselstrøm kaldes også en pulserende jævnstrøm.

Hvis strømmen skifter retning (polaritet), men ikke flytter lige store ladninger frem og tilbage i ledningen, kaldes den vekselstrøm overlejret med jævnstrøm:

fig 5.05



Som antydnet på figuren kan sådan en strøm løbe i et forsyningsnet, som belastes med en primitiv ensretterkobling. Elforsyningsselskaberne er ikke særlig glade for denne type belastning. IEC (International Electrotechnical Commission) anbefaler regler, som begrænser belastning af denne type, og i skrivende stund (september 1991) er EF ved at finpudse et direktiv om emnet.

Tilsvarende har man jævnspænding overlejret med vekselspænding og vekselspænding overlejret med jævnspænding.

En ren vekselstrøm (af nogenlunde høj frekvens) vil ikke give synligt udslag på et jævnstrøms-Amperemeter med drejespole. Tilsvarende vil en ren vekselspænding ikke få et jævnspændings-Voltmeter til at reagere.

Det skal her indskydes, at Ohms lov, Kirchhoffs love, Thevenins og Nortons kredsløbsmodeller, superpositionsprincippet og Maxwells løsningsmetode er gyldige ved jævn- og vekselstrøm og ved sammensatte strømme (og spændinger).

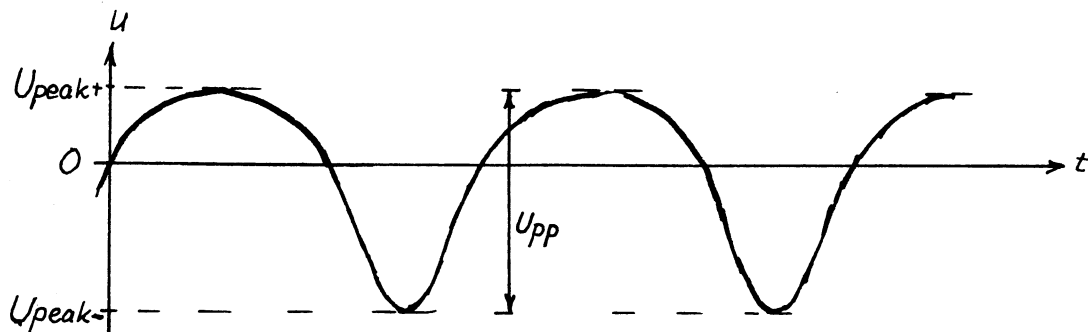
#### Måleværdier:

Selv om vekselspændinger (og -strømme) i sagens natur er alt andet end konstante, kan man dog beskrive dem med tal. Det

gælder først og fremmest periodiske vekselspændinger

1)

Man kan beskrive, hvor meget deres oscilloscobbillede fylder  
fig 5.06



På figuren er markeret:

Positiv topværdi ( $U_{peak+}$ ), negativ topværdi ( $U_{peak-}$ ) samt spids-til-spidsværdien ( $U_{peak-peak}$ ,  $U_{pp}$ ).

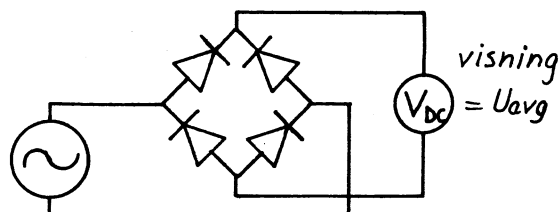
Et hastigt kig i litteraturen viser benævnelser som  $U_{MAX}$ ,  $U_t$  (topspænding). Her i afsnittet index  $p$ , eller  $peak$ .

Hvorfor dog ikke de andre? Jo - altså: MAX og MIN benyttes uhyre ofte i toleranceangivelser;  $U_{MAX(MIN)}$  virker ret forvirrende!  $U_t$  kan sagtens forveksles med en Thevenin- eller tomgangsspænding og  $U_{ss}$  er ifølge IEC forsyningsspænding til source i kredsløb med field effect transistorer. Altså  $U_{peak}$  (evt. med + eller -),  $U_{pp}$ .

2)

Man kan beskrive, hvad et jævnspændings-Voltmeter med en måleensretter vil vise

fig 5.07

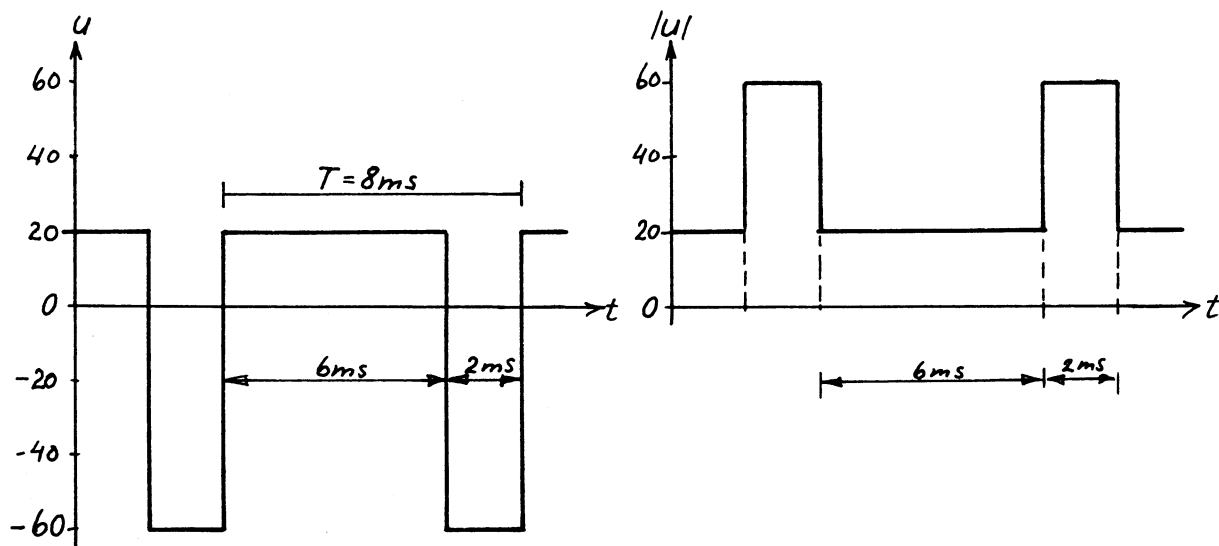


Index  $_{avg}$  står for "average", som er engelsk og betyder gennemsnit. Matematisk kan det skrives:

$$U_{avg} = \frac{1}{T} \int_0^T |u| \cdot dt$$

eller skrevet med tekst: Det samlede Voltsekund-produkt (uden fortegn) i en hel periode divideret med periodetiden. Et eksempel:

fig 5.08



Her finder vi  $U_{avg}$ , på dansk også kaldt middelværdien, som

$$U_{avg} = \frac{20V \cdot 6ms + 60V \cdot 2ms}{8ms} = 30V$$

3)

Matematisk mest besværlig er effektiv-værdien. Den første større udbredelse af elektriciteten var til belysning. I privathjem var det glødelamper, der blev brugt. Et mål for en vekselspænding skulle derfor først og fremmest være dens evne til at erstatte en jævnspænding over en glødelampe.

(Det første jævnspændings-bynet til belysning var Edisons i New York i 1882. Et af de sidste blev afviklet i København først i 1970-erne)

Lysstyrken i en glødelampe afhænger af glødetrådets temperatur. Denne temperatur afhænger igen af middel-effekten:

$$P_{\text{middel}} = \left(\frac{u^2}{R}\right)_{\text{middel}} = \frac{(u^2)_{\text{middel}}}{R} \quad \text{OG} \quad P_{\text{middel}} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$$

Vi får altså effektiv-spændingen

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{P_{\text{middel}} * R} = \sqrt{\frac{(u^2)_{\text{middel}}}{R} * R}$$

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{(u^2)_{\text{middel}}}$$

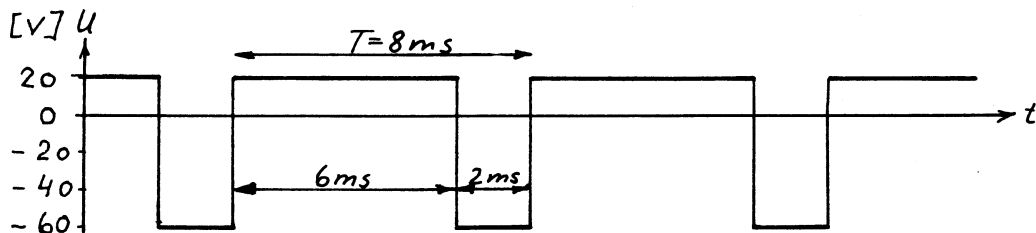
Det ses altså, at effektiv-spændingen findes som kvadratroden af middelværdien af kvadratet på spændingen. Heraf kommer den engelske benævnelse root-mean-square, rms.

Bemærk rækkefølgen i regnestykket (SNYD IKKE DIG SELV):

FØRST kvadrering, DERNÆST middelværdi, SIDST kvadratrod.

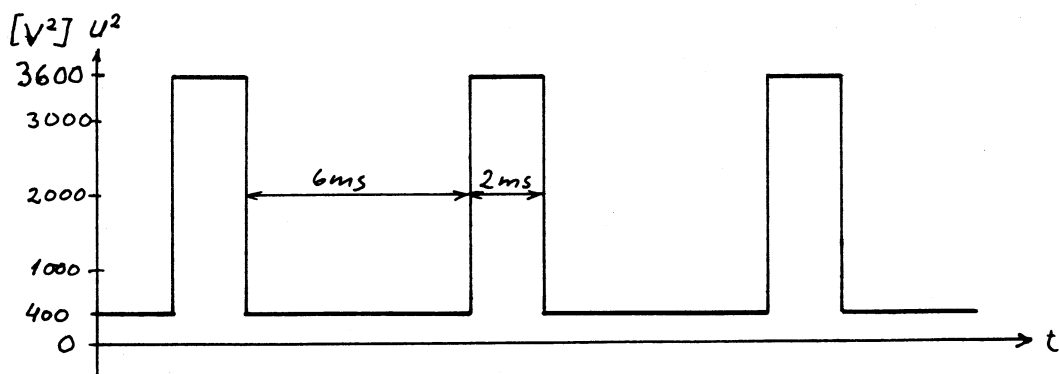
Et eksempel:

fig 5.09



Der kvadreres, så vi får  $u^2 = f(t)$

fig 5.10



Vi finder "middelkvadratet" som

$$(u^2)_{\text{middel}} = \frac{400\text{V}^2 * 6\text{ms} + 3600\text{V}^2 * 2\text{ms}}{8\text{ms}} = 1200\text{ V}^2$$

og effektiv-værdien = rms-værdien

$$U_{\text{eff}} = U_{\text{rms}} = \sqrt{(u^2)_{\text{middel}}} = \sqrt{1200\text{ V}^2} \approx \underline{34.6\text{Volt}}$$

Aperiodiske spændinger beskrives oftest med deres effektivværdi og det frekvensområde, som effektivværdien måles over.

Bemærk, at de vekslende øjebliksværdier af spændinger og strømme betegnes med de små bogstaver  $u$  og  $i$ . De konstante størrelser betegnes derimod med store bogstaver  $U$  og  $I$ :

$U_{peak}$ ,  $I_{peak}$ ,  $U_{pp}$ ,  $I_{pp}$ ,  $U_{avg}$ ,  $I_{avg}$ ,  $U_{rms}$  og  $I_{rms}$ .

Mellem disse konstanter defineres faktorerne:

$$\text{Formfaktoren} = \frac{U_{rms}}{U_{avg}} \quad \text{og}$$

$$\text{Topfaktoren (crest factor)} = \frac{U_{peak}}{U_{rms}}$$

Oscilloscoper viser øjebliks- og spidsværdier.

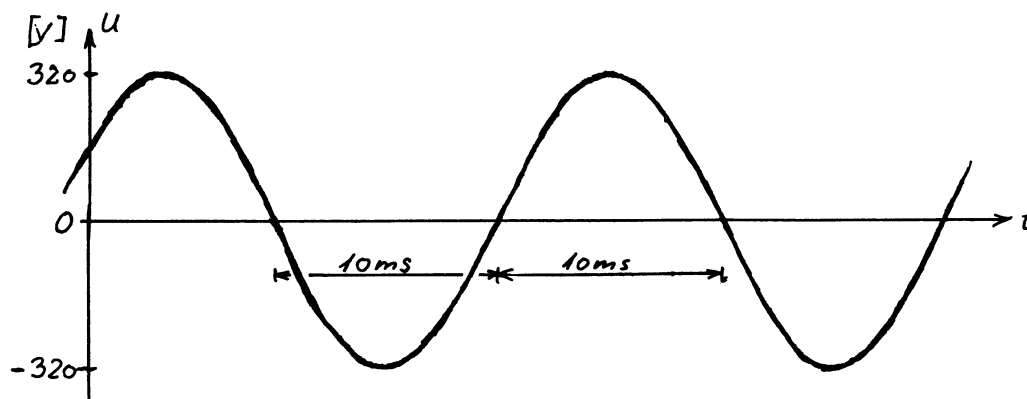
De fleste universalinstrumenter vil i ac-stilling vise 1.11 gange  $U_{avg}$  henholdsvis  $1.11 \cdot I_{avg}$ .

Enkelte specialinstrumenter måler og viser sand effektivværdi. Det fremgår ofte af forpladeteksten, at der måles "true rms". Visse "klassiske" instrumenttyper måler dog umiddelbart også effektivværdi. Det drejer sig om blødtjerns-Amperemeteret, varmetråds-Amperemeteret og termokors-Amperemeteret.

#### Sinusformet spænding og strøm

Den spænding, der er mellem lederne på lysnettet, har nogenlunde dette udseende på oscilloscopet:

fig. 5.11



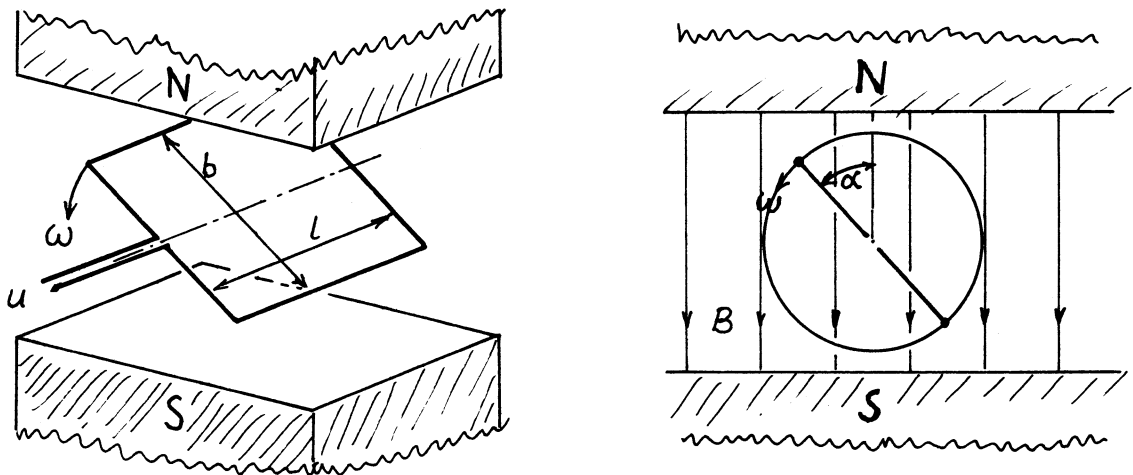


(Man skal nok sikre sig, at oscilloscopet og dets probe kan tåle spændingen, før man forsøger!)

Hvis en overvejende del af den lokale belastning på nettet er lysstofrør, computere og TV-apparater, må man dog regne med en del uregelmæssigheder i kurveformen.

En spænding med denne kurveform fremkommer over en trådsløjfe, der roterer med konstant omdrejningshastighed i et homogent magnetfelt. Det er ikke nogen betingelse, men det er lettest at regne på, når rotationsaksen står vinkelret på magnetfeltet.

fig. 5.12



Trådsløjfen har et areal  $A = l * b$ . Den flux  $\Phi$ , som genemløber sløjfen, afhænger af sløjfens vinkel  $\alpha$  i forhold til magnetfeltets retning samt af fluxtætheden  $B$ :

$$\Phi = B * A_{\text{effektiv}} = B * A * \sin(\alpha)$$

Hvis sløjfen drejes med den konstante omdrejningshastighed  $f$  omgange pr. sekund, vil vinkel  $\alpha$  vokse med konstant hastighed. I naturligt vinkelmål vil  $\alpha$  tiltage med  $2\pi$  radianer for hver omdrejning, og antallet af omdrejninger vil blive lig  $f * t$ .

Det ses let af et par regneeksempler.

Hvis vi - helt tilfældigt - prøver med  $f = 50$  omgange pr. sekund, vil sløjfen på 5 millisekunder drejes  $\frac{1}{4}$  omgang

$$50 \frac{\text{omgange}}{\text{sekund}} * 0.005 \text{ sekund} = 0.25 \text{ omgang}$$

For hver omgang vil vinkel  $\alpha$  som nævnt vokse med  $2\pi$  radianer - altså vil vinkel  $\alpha$  kunne findes af:

$$\alpha = 2 * \pi * f * t \text{ [radianer]}$$

Størrelsen  $2 * \pi * f$  kaldes også vinkelhastigheden  $\omega$  (omega) og måles i radianer pr. sekund. Nu er radianer ikke en "rigtig" enhed, men blot et forhold mellem to mål, så den korrekte måleenhed - og den man støder på i den mere seriøse litteratur - er  $1/s = s^{-1}$  ("pr. sekund" eller "sekund i minus første").

Vi vil senere se, at det er denne vinkelhastighed,  $\omega$ , og ikke frekvensen,  $f$ , som er den "interessante" størrelse i beregning af frekvensafhængige egenskaber.

Nå - tilbage til figuren:

Vi har altså en flux  $\Phi$  gennem trådsløjfen:

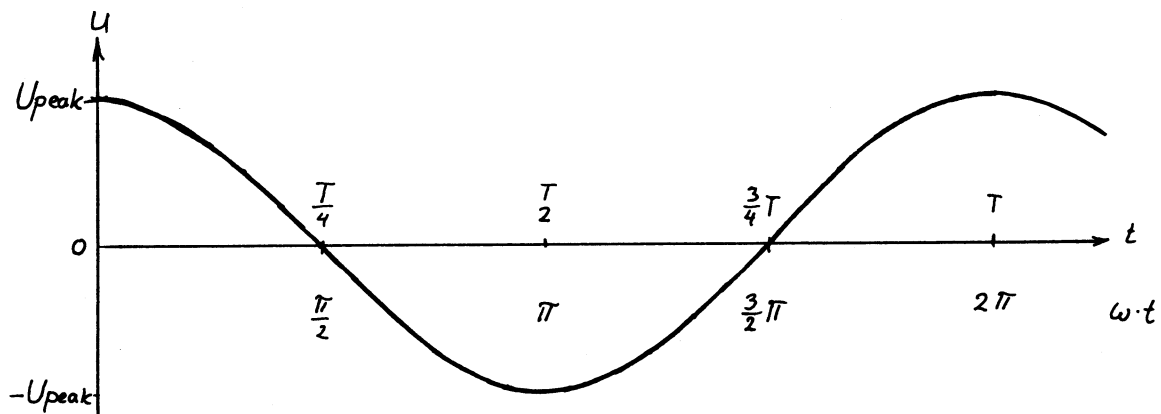
$$\Phi = B * A * \sin(\alpha) = B * A * \sin(2\pi ft) = B * A * \sin(\omega t)$$

Ifølge induktionsloven bliver den inducerede spænding

$$u(t) = (n *) \frac{d\Phi}{dt} = (n *) B * A * \omega * \cos(\omega t)$$

og dette er en regelmæssigt gentaget (periodisk) spænding:

fig. 5.13



Eftersom en cosinusfunktion har grænseværdierne  $+1$  og  $-1$ , får spændingen spidsværdien  $U_{\text{peak}} = (n *) B * A * \omega$ .

$$u(t) = U_{\text{peak}} * \cos(\omega t)$$

Om vi kalder dette for en cosinusformet spænding eller en sinusformet spænding, er egentlig ret ligegyldigt, da de to funktioner er ensdannede, hvis vi "mingelerer" lidt med tidsaksen. I praksis kan vi vælge frit: På oscilloscopet kan vi jo dels vælge triggerflanke og triggerniveau, dels kan vi forskyde billedet både til højre og til venstre. Vi kan altså lige så godt beskrive funktionen som:

$$u(t) = U_{\text{peak}} * \sin(\omega t)$$

- bare vi ikke blander de to beskrivelsesmåder i samme regnestykke!

I fig. 5.12 er magneten fast, mens trådsløjfen roterer. "Ude i den virkelige verden" - i cykeldynamoen, i bilens generator og i kraftværkernes generatorer - er spolen eller spolerne fastsiddende, mens magneten roterer.

Når en sådan sinusformet spænding påtrykkes en antenne, vil der i rummet omkring antennen optræde et vekslende elektrisk felt OG et vekslende magnetisk felt. Eftersom dette elektromagnetiske felt i mange henseender udbreder sig lige som lydbølger og som bølger på en vandoverflade, kaldes det også en elektromagnetisk bølge. I luft og i det tomme rum vil det brede sig ud med lysets hastighed  $c_0 \approx 300 * 10^6$  m/s eller  $7\frac{1}{2}$  gange rundt om jorden på ét sekund. I andre stoffer kan udbredelseshastigheden findes af

$$c = \frac{1}{\sqrt{(\mu * \epsilon)}}$$

Hvis man tænker sig et signal med frekvensen  $f$  udsendt i 1 sekund, vil der altså være udsendt  $f$  svingninger eller bølger. Hver af disse vil så have bølgelængden  $\lambda$  (lambda):

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \quad \text{Eksempel: } \lambda = \frac{3 * 10^8}{108 \text{ MHz}} \approx 2.78 \text{ meter}$$

I denne sammenhæng vil enhver stump ledning og enhver

trådsløjfe kunne optræde som "antenne" og udsende elektromagnetiske felter. I uheldige tilfælde kan disse felter forstyrre modtagelse af radiosignaler. Både overnationale og nationale institutioner (Telestyrelsen) har derfor foreskrevet grænseværdier for tilladelig elektromagnetisk udstråling i forskellige frekvensområder.

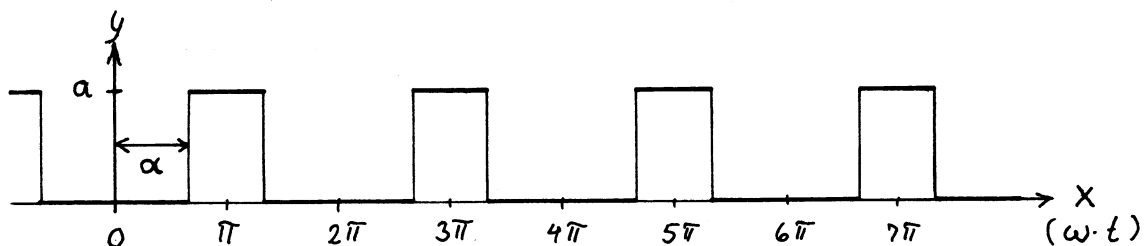
### Fourier-rækker

Den franske matematiker og fysiker Jean-Baptiste-Joseph Fourier påviste, at alle periodiske funktioner kan beskrives som summen af et konstant led og en række af harmoniske (samklingende) cosinus- og sinusfunktioner. Frekvenserne for disse harmoniske funktioner er allesammen "heltalsmultipla" af én frekvens; det vil sige, at de findes som en grundfrekvens, 1. harmoniske, ganget med et helt tal. Matematisk kan det udtrykkes på formen:

$$f(\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot \omega t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega t)]$$

Dette virker ret uoverskueligt, så her skal vises et par eksempler

fig. 5.14

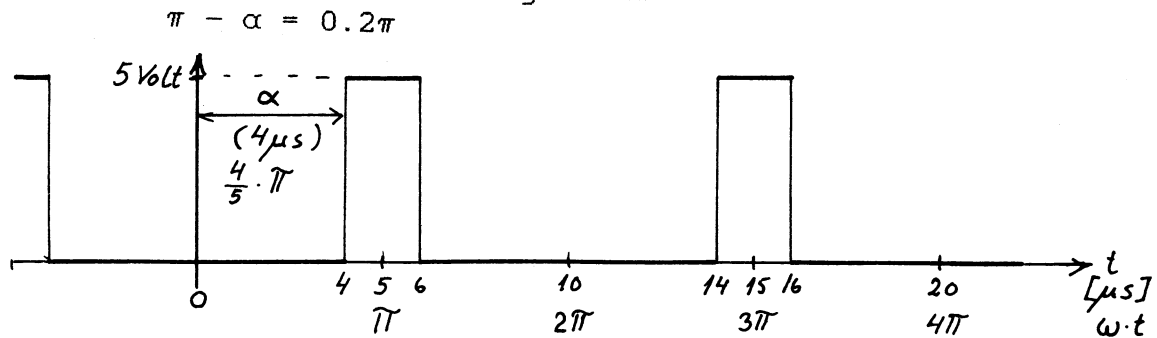


Fra Gieck: Technical formulae 1985-udgaven hentes: (d126)

$$y = \frac{2a}{\pi} \left[ \frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\sin(\pi - \alpha)}{1} \cos(x) + \frac{\sin 2(\pi - \alpha)}{2} \cos(2x) - \dots + \dots \right]$$

Lad os forestille os, at vi laver en sådan kurveform - enten med en programmerbar pulsgenerator eller med en funktionsgenerator med variabel duty cycle og DC-offset. Amplituden a sættes til +5 Volt, pulsvarigheden sættes til 2  $\mu$ s, og pausetiden sættes til 8  $\mu$ s:

fig. 5.15



Grundfrekvensen er  $1 : 10 \mu s = 100 \text{ kHz}$ ,  $\omega = 2 * \pi * 100 \text{ E3}$ , og Fourier-rækken bliver:

$$u(t) = \frac{2 * 5}{\pi} \left[ \frac{0.2\pi}{2} - \frac{\sin 0.2\pi}{1} \cos \omega t + \frac{\sin 2(0.2\pi)}{2} \cos 2\omega t - \frac{\sin 3(0.2\pi)}{3} \cos 3\omega t + \frac{\sin 4(0.2\pi)}{4} \cos 4\omega t - \frac{\sin 5(0.2\pi)}{5} \cos 5\omega t + \frac{\sin 6(0.2\pi)}{6} \cos 6\omega t - \frac{\sin 7(0.2\pi)}{7} \cos 7\omega t \text{ osv. osv.} \right]$$

Der ganges ind i klamme-parentesen:

$$u \approx 1.00 \text{ Volt} - 1.87 \text{ Volt} * \cos(\omega t) + 1.51 \text{ Volt} * \cos(2\omega t) - 1.01 \text{ Volt} * \cos(3\omega t) + 0.47 \text{ Volt} * \cos(4\omega t) - 0 * \cos(5\omega t) + (-0.31) \text{ Volt} * \cos(6\omega t) - (-0.43) \text{ Volt} * \cos(7\omega t) \text{ osv. osv.}$$

Som det fremgår af tallene, er jævnspændingsindholdet af funktionen det samme som (duty cycle) \* pulshøjden = 1.00 V. Amplituden (spidsværdien) af de første 7 harmoniske er henholdsvis 1.87 V, 1.51 V, 1.01 V, 0.47 V, 0, 0.31 V og 0.43 Volt.

Hvis vi skulle få lyst til at finde amplituden af den 17. harmoniske på 1.7 MHz, finder vi den som:

$$a_{17} = \frac{2 * 5V}{\pi} * \frac{\sin 17(0.2\pi)}{17} \approx (-)0.178 \text{ Volt}$$

Det ses af udtrykkene, at ikke-sinusformede signaler "breder" sig temmelig voldsomt i frekvens-spektret.

Hvis man har fået tildelt en frekvens af en telestyrelse til en radiosender, skal man altså sikre sig, at signalet til

antennen er "pænt" sinusformet. Ellers stråler man også højere harmoniske ud, og det gælder sendetilladelsen ikke til!

Man kan regne på et signals indhold af harmoniske, som det er vist her. Derudover kan man måle med adskillige fabrikater og typer af "frekvensanalysatorer" eller "spectrum analyzers". Nogle af disse arbejder efter samme princip som en radiomodtager (superheterodyn-princippet), og nogle af dem arbejder matematisk - efter Fouriers oprindelige metoder - og bearbejder signalet med en Digital Signal Processor.

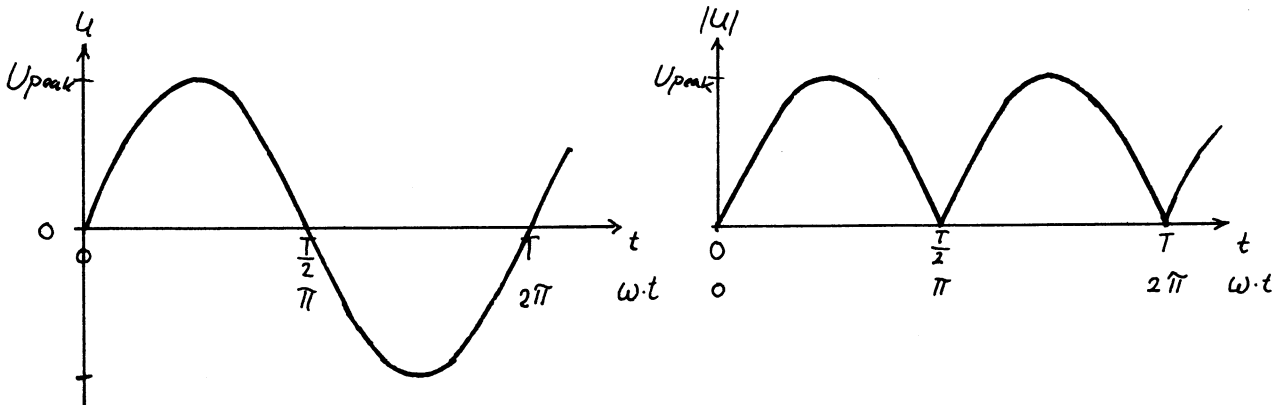
### Konstanter for sinusformede spændinger

Middelværdi:

$$\text{Det repeteres, at } U_{\text{avg}} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |u| \cdot dt$$

Det kan vi prøve på en sinusformet spænding, idet vi først skitserer  $u(t)$  og  $|u|(t)$ :

fig. 5.16



Vi ser af det numeriske forløb, at det må være tilstrækkeligt med beregning på én halvperiode:

$$U_{\text{avg}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} |u| \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_{\text{peak}} \cdot \sin(\omega t) \, dt =$$

$$\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_{\text{peak}} \cdot \sin(2\pi f t) \, dt = \frac{2}{T} + \frac{1}{2\pi f} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} U_{\text{peak}} \cdot \sin(2\pi f t) \, d(2\pi f t)$$

$$= \frac{2}{2\pi f T} \cdot U_{\text{peak}} \cdot [-\cos(2\pi f t)]_0^{\frac{T}{2}}$$

Eftersom  $f \cdot T = 1$  (de to er reciprokke), fås:

$$U_{avg} = \frac{1}{\pi} \cdot U_{peak} \cdot \left[ -\cos\left(2\pi f \frac{T}{2}\right) - (-\cos(2\pi f \cdot 0)) \right]$$

$$U_{avg} = \frac{1}{\pi} \cdot U_{peak} \cdot [1 - (-1)]$$

$$U_{avg} = \frac{2}{\pi} \cdot U_{peak}$$

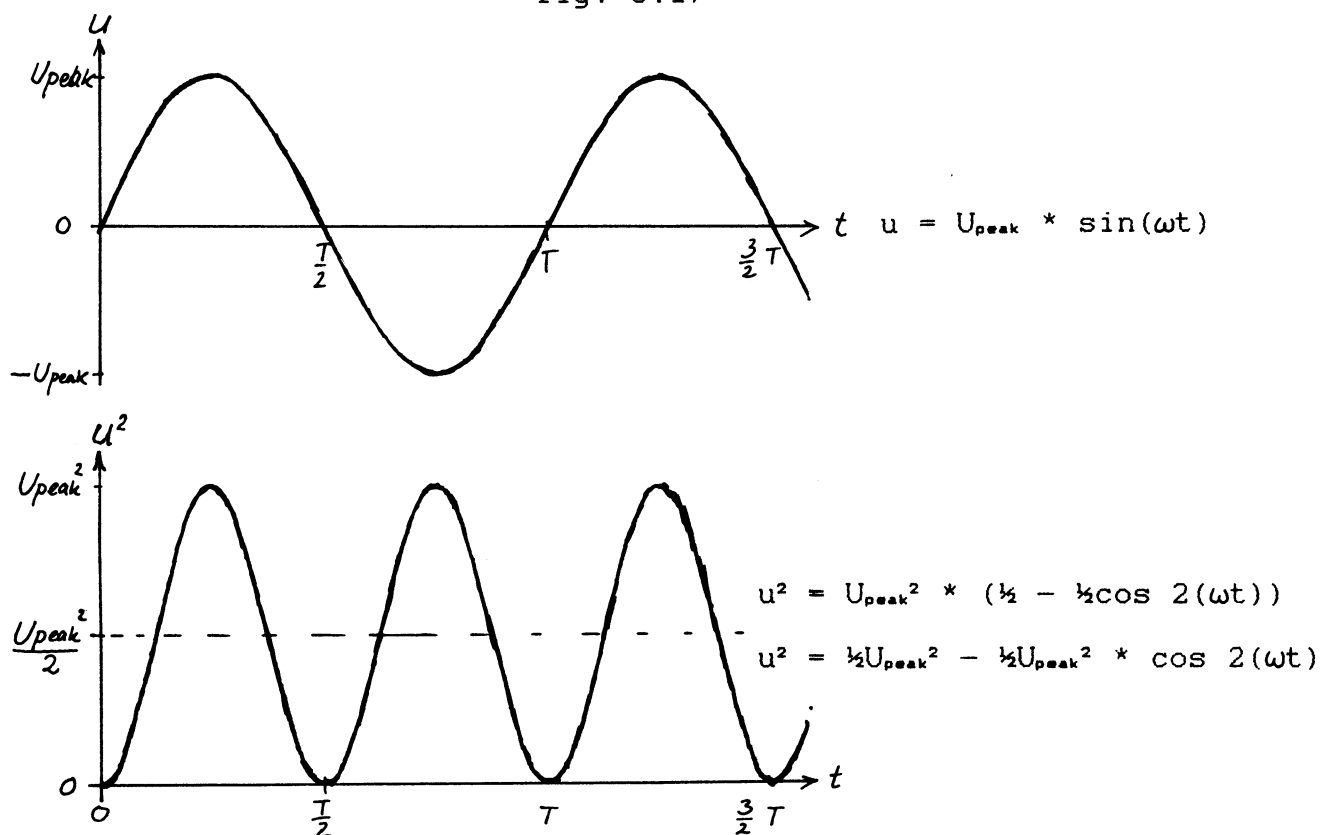
Effektiv-værdi af sinusspænding:

Vi repeterer:

$$U_{eff} = U_{rms} = \sqrt{(u^2)_{middel}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}$$

og så foretager vi et tabelopslag:  $(\sin x)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

fig. 5.17



Af grafen og regneudtrykket kan det ses, at

$$(u^2)_{middel} = \frac{1}{2} U_{peak}^2$$

$$U_{eff} = U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2} U_{peak}^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot U_{peak}$$

Heraf fås:

$$U_{\text{peak}} = \sqrt{2} * U_{\text{rms}}.$$

Bemærk, at disse sammenhænge:

$$U_{\text{avg}} = (2/\pi) * U_{\text{peak}} \quad \text{OG} \quad U_{\text{eff}} = U_{\text{rms}} = \sqrt{1/2} * U_{\text{peak}},$$

formfaktoren ( $U_{\text{rms}}/U_{\text{avg}}$ )  $\approx 1.111$ , topfaktoren  $= \sqrt{2} \approx 1.41$

gælder for SINUS- og COSINUS-formede spændinger og strømme. De kan derfor ikke bruges ukritisk.

Formfaktoren for sinusspændinger forklarer, hvorfor næsten alle universalinstrumenter viser  $1.111 * \text{middelværdien}$  af vekselstrømme og -spændinger.

#### Kondensator ved sinusformet vekselspænding

For en kondensator gælder generelt:

$$Q = C * U \quad \text{og}$$

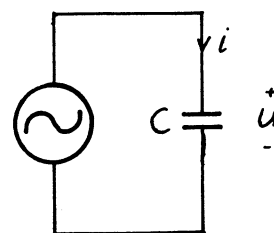
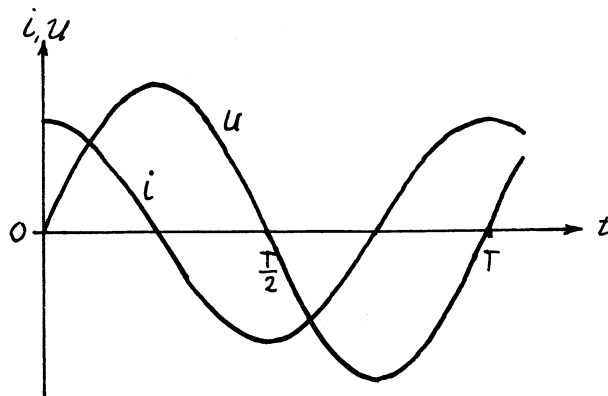
$$i = \frac{dQ}{dt} = C * \frac{du}{dt}.$$

Hvis  $u = U_{\text{peak}} * \sin \omega t$ , fås

$$i = C * \omega * U_{\text{peak}} * \cos \omega t = I_{\text{peak}} * \cos \omega t.$$

Afbildet som funktion af tiden ser det således ud:

fig. 5.18

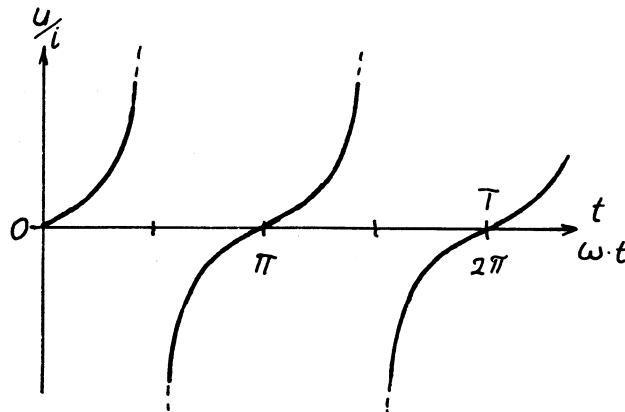


Hvis vi prøver at finde kondensatorens "modstand" ( $u/i$ ) over



for strømmen, får vi et problem:

fig. 5.19



Hvis vi kun betragter strømme og spændinger som funktioner af tiden (som de ses på et oscilloscop), kan vi ikke beskrive forholdet ( $u/i$ ), da det svinger mellem  $+\infty$  og  $-\infty$ . Hvis vi nærlæser i matematikbogen under komplekse tal, ser vi, at det komplekse tal  $r/\theta$  også kan skrives som:

$$r/\theta = r * e^{j\theta} = r * (\cos \theta + j \sin \theta).$$

Hvis vi sammenholder det med forholdene i kondensatoren fra før, ser vi, at

$$i = \omega * C * U_{\text{peak}} * \text{Re}\{e^{j\omega t}\} \text{ og}$$

$$u = U_{\text{peak}} * \text{Im}\{e^{j\omega t}\}.$$

Hvis vi nogenlunde smertefrit skal kunne beregne sammenhænge mellem strømme og spændinger i kredsløb, som indeholder kondensatorer og spoler, bliver vi nødt til at "tænke tredimensionelt".

Disse sammenhænge kan udtrykkes med tal, når vi betragter en (co)sinusformet strøm eller spænding som den todimensionale projektion af en roterende vektor i et komplekst tredimensionalt rum.

Rotationshastigheden er  $\omega$  radianer pr. sekund, vektorlængden er  $U_{\text{peak}}$  eller  $I_{\text{peak}}$  og tiden for én omdrejning er én periodetid,  $T = 1/f$ .

Akserne i det skitserede tredimensionale koordinatsystem er:

Reeldelen, imaginærdelen og tiden

fig. 5.20

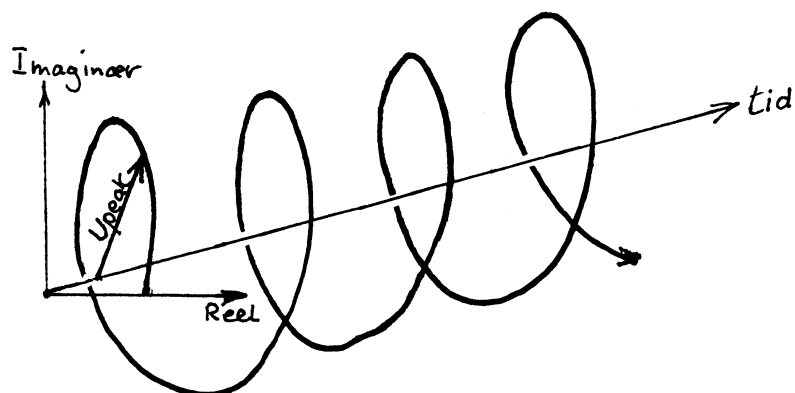
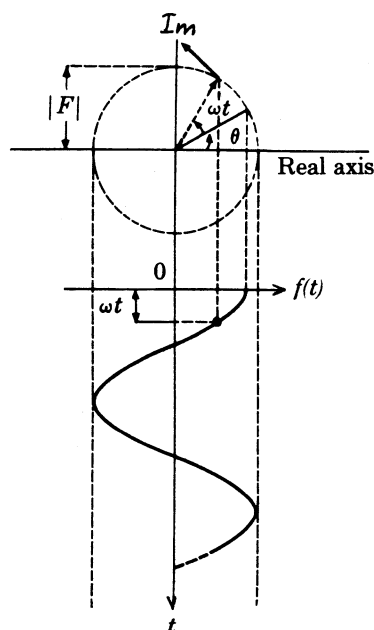


fig. 5.21

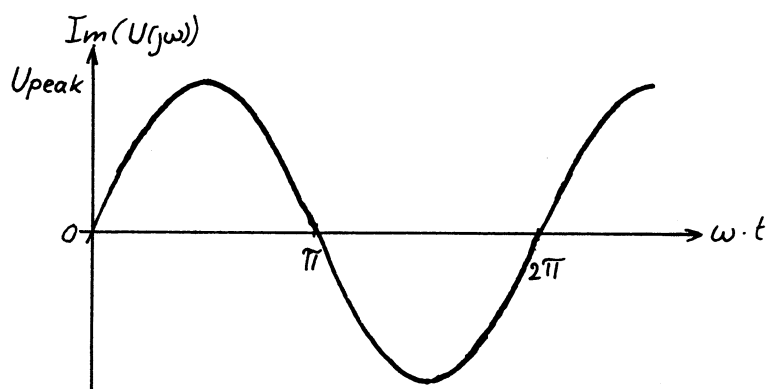
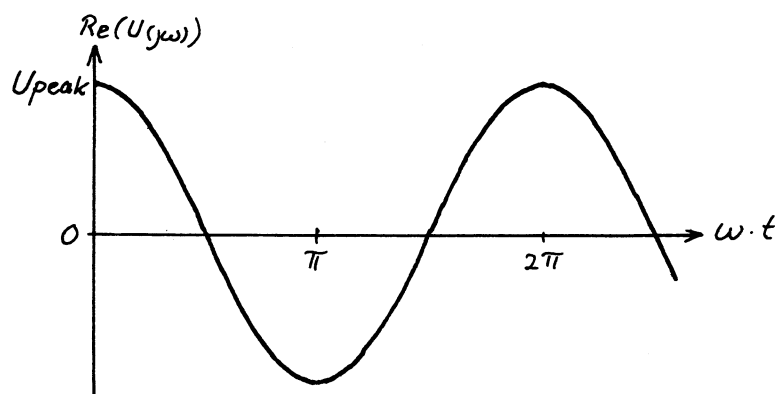


fig. 5.22



Det er muligt, måske endda sandsynligt, at dette er svært at "forstå". Så er det måske en trøst, at man sagtens kan benytte sig af metoder og sammenhænge, som man ikke forstår,

blot man accepterer dem. Dette kompendiums forfatter har ved mange lejligheder kørt bil uden helt at "forstå" princippet i hypoid-fortandede gearhjul.

Det, som kræves her, er en accept af, at en sinusformet spænding kan beskrives med en konstant vektor (lig med spidsværdien) og vinkelhastigheden  $\omega$ :

$$U(j\omega) = U_{\text{peak}} * e^{j(\omega t + \theta)}$$

Bemærk, at spændingen nu skrives med stort U. Det skyldes, at den betragtes som en konstant, som blot ændrer sin vinkel i rummet med konstant hastighed. Men dens afbildning - for eksempel på et oscilloscop - kan vi stadig beskrive som den variable  $u(t)$ .

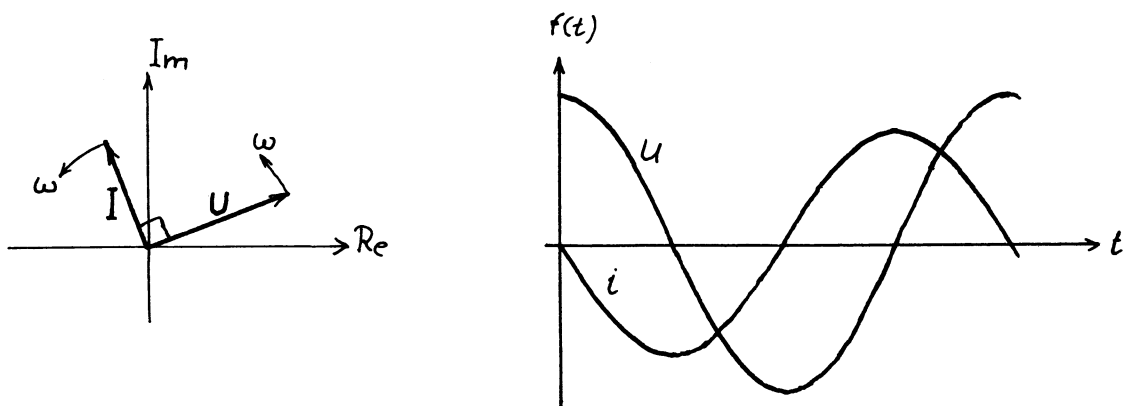
Nu kan vi igen forsøge os med strømmen i en kondensator:

$$I(j\omega) = C * \frac{d(U(j\omega))}{dt} = C * \frac{d(U_{\text{peak}} * e^{j\omega t})}{dt}$$

$$I(j\omega) = C * j\omega * U_{\text{peak}} * e^{j\omega t}.$$

Det ses, at hvis vi betragter spændingen som en konstant vektor med vinkelhastigheden  $\omega$ , så bliver strømmen ligeledes en konstant vektor med samme vinkelhastighed. Som det ses af faktoren  $j\omega$ , er strømvektorens vinkel  $90^\circ$  eller  $\pi/2$  radianer foran spændingsvektoren. Som det ses af figuren, svarer det til  $\frac{1}{4}$  periode i tidsdomænet.

fig. 5.23



Både i det komplekse plan og i tid kommer strømmen før spændingen. Man siger, der er  $90^\circ$  faseforskydning mellem strøm og spænding.

Nu er det muligt at beregne et konstant forhold mellem spænding og strøm:

$$\frac{U(j\omega)}{I(j\omega)} = \frac{U_{\text{peak}} * e^{j\omega t}}{C * j\omega * U_{\text{peak}} * e^{j\omega t}} = \frac{1}{j\omega C}$$

Denne størrelse indeholder både oplysning om forholdet mellem vektorlængderne og faseforskellen mellem strøm og spænding.

På samme måde kan vi beskrive forholdet mellem spænding og strøm for en spole med selvinduktionen  $L$ :

$$u(t) = L * \frac{di}{dt}$$

I det komplekse rum bliver det:

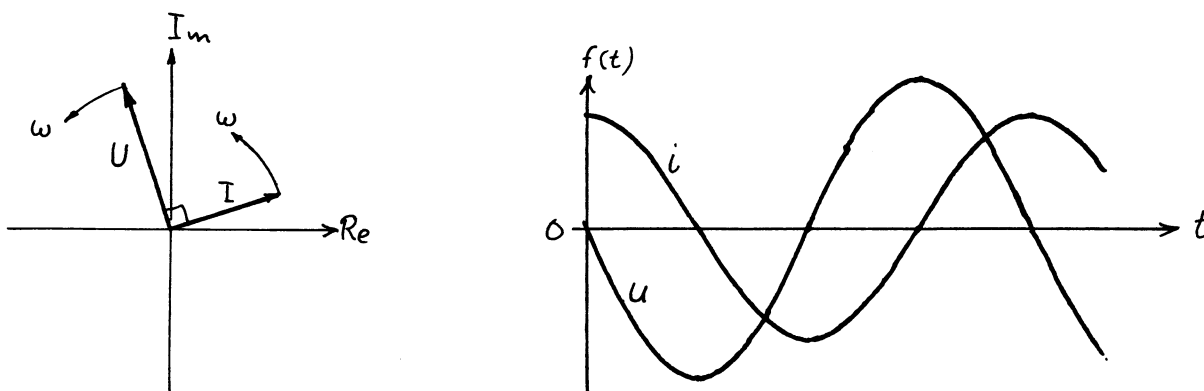
$$U(j\omega) = L * \frac{d(I_{\text{peak}} * e^{j\omega t})}{dt} = j\omega L * I_{\text{peak}} * e^{j\omega t}$$

heraf fås:

$$\frac{U_L(j\omega)}{I_L(j\omega)} = \frac{j\omega L * I_{\text{peak}} * e^{j\omega t}}{I_{\text{peak}} * e^{j\omega t}} = j\omega L$$

Dette kan vises vektorielt og som funktion af tiden:

fig.5.24

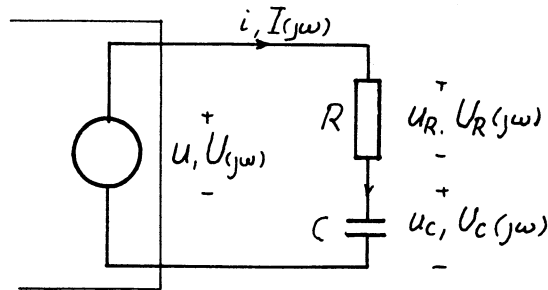


Det ses af figuren, at spændingen kommer  $\pi/2$  radianer,  $90^\circ$ , henholdsvis  $\frac{1}{4}$  periode før strømmen. Altså igen  $90^\circ$  faseforskydning, men nu den modsatte vej. Desuden ser vi som en karakteristisk forskel, at  $(U/I)(j\omega)$  for en spole er proportional med frekvensen, mens forholdet for en kondensator er omvendt proportionalt med frekvensen.

Impedans

Hvis en generator med sinusformet output belastes med en serieforbindelse af en modstand og en kondensator, må strømmen være den samme i de to komponenter:

fig. 5.25



$I = I_R = I_C$ . Ifølge Kirchhoffs 2. lov (og almindelig intuition) må generatorens klemspænding,  $U$ , være summen af spændingsfaldene over modstanden og over kondensatoren.:

$$U(j\omega) = U_R(j\omega) + U_C(j\omega)$$

Fra tidligere har vi sammenhængene:

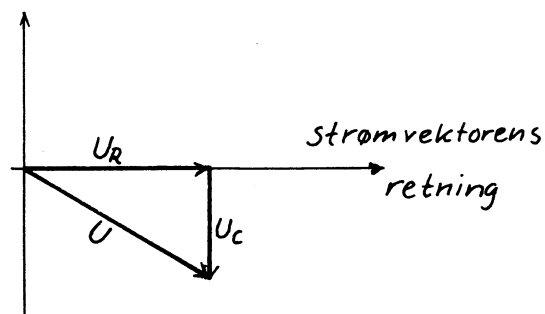
$$\frac{U_R}{I_R} = R \quad \text{og} \quad \frac{U_C}{I_C}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$$

Det betyder, at den samlede spænding bliver

$$U(j\omega) = I(j\omega) * R + I(j\omega) * \frac{1}{j\omega C}$$

Dette regnestykke kan vises grafisk med vektordiagrammet:

fig.5.26



Som det kan ses, lægger man de tal, som skal adderes, addenderne, i forlængelse af hinanden. Akkurat samme metode, som når man tegner en rute på et landkort for eksempel til

et orienteringsløb. Her er hver etape også karakteriseret ved en længde og en retning (vinkel).

Kredsløbets "vekselstrømsmodstand", impedansen  $Z$ , findes som

$$Z(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{I(j\omega)} = R + \frac{1}{j\omega C}$$

Et eksempel:

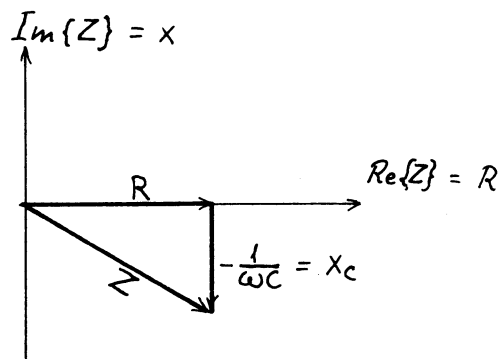
En serieforbindelse af en modstand på  $820 \Omega$  og en kondensator på  $220 \text{ nF}$  ved  $1600 \text{ Hz}$  vil have impedansen

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = R + j \frac{-1}{\omega C} = 820 + j \frac{-1}{2\pi \cdot 1600 \cdot 220 \cdot 10^{-9}}$$

$$Z = (820 - j452) \Omega = 820 \Omega + j(-452 \Omega)$$

Også for impedansen kan vi tegne et vektordiagram:

fig. 5.27



Her dukker et nyt ord op: reaktansen,  $X$ .

Reaktansen er den imaginære del af en kompleks impedans. I eksemplet fra før er reaktansen  $X = -452 \Omega$ , altså det tal, der står "+ j" foran. Den reelle del,  $820 \Omega$ , er resistansen, og den kender vi jo allerede.

Altså: Reaktansen af en kapacitet er negativ og omvendt proportional med frekvensen.

$$X_c = \frac{-1}{\omega C} = \frac{-1}{2\pi f C} \quad [\Omega]$$

I mange sammenhænge dropper man minusset på  $X_c$ :

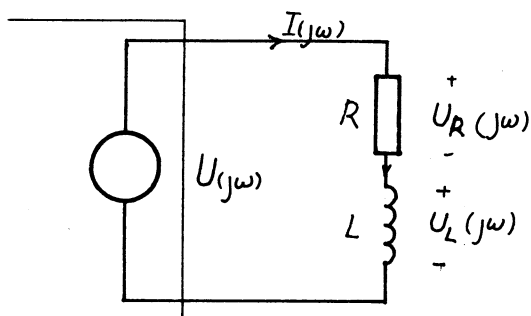
$$|X_c| = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad [\Omega]$$

Det kan dog give problemer, når man skal regne på vinkel-

eller faseforhold i sammensatte kredsløb, og det vil med sikkerhed give problemer, når man regner på kredsløb, som indeholder både kapacitet og selvinduktion.

Vi kan prøve at belaste en generator med en serieforbindelse af en modstand og en spole med selvinduktionen  $L$ :

fig. 5.28

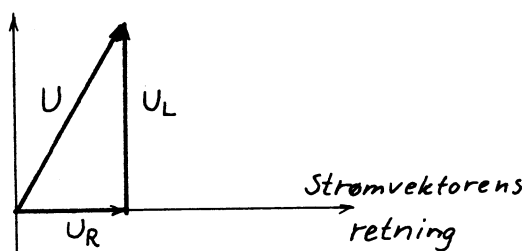


Igen er strømmen  $I$  fælles, og den samlede spænding bliver:

$$U(j\omega) = U_R(j\omega) + U_L(j\omega) = I(j\omega) * R + I(j\omega) * j\omega L$$

Grafisk ser det sådan ud:

fig. 5.29

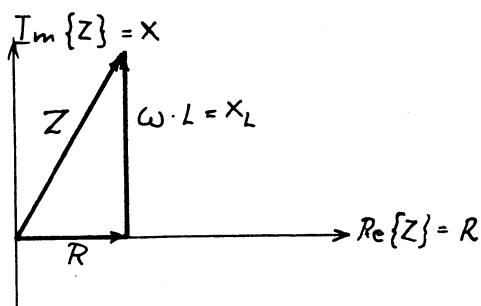


Impedansen af kredsløbet bliver:

$$Z(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{I(j\omega)} = R + j\omega L$$

Og impedansens vektordiagram får udseendet:

fig. 5.30



Atter er resistansen  $R$  reeldelen af den samlede impedans. Reaktansen er imaginærdelen af impedansen, altså størrelsen efter "+ j":

$$X_L = \omega * L = 2 * \pi * f * L.$$

Reaktansen af en spole er positiv og proportional med frekvensen.

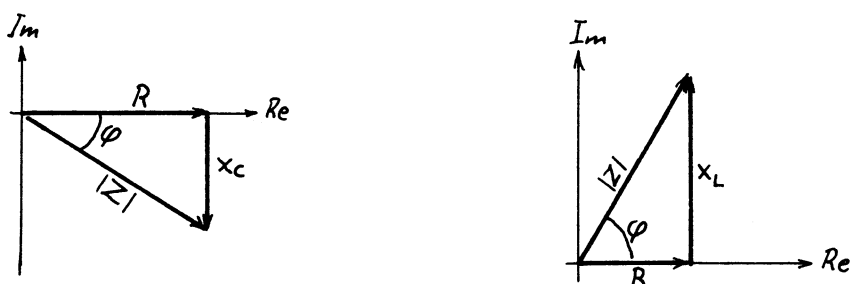
Hvis vi prøver med en  $100 \Omega$  modstand i serie med  $400 \mu\text{H}$  ved frekvensen  $85 \text{ kHz}$ , får vi

$$Z = 100 \Omega + j 214 \Omega$$

Resistansen er  $100 \Omega$ , og reaktansen er  $(+)214 \Omega$ .

Lad os lige genkalde de to vektordiagrammer for impedanserne

fig. 5.31



De to impedanser har hver sin fasevinkel  $\emptyset$ . Disse vinkler findes efter de sædvanlige regler for regning med komplekse tal:

$$Z = R + jX = |Z| \angle \emptyset,$$

$$\text{hvor } \angle \emptyset = \arctan \frac{X}{R}, \text{ og } |Z| = \sqrt{(R^2 + X^2)} = \frac{R}{\cos \emptyset} = \frac{X}{\sin \emptyset}$$

Vi kan også gå den anden vej:

$$R = |Z| * \cos \emptyset ; X = |Z| * \sin \emptyset.$$



Øvelse:

Find  $|Z|$   $\angle \varphi$  for serieforbindelserne af:

a)  $820 \Omega$  og  $220 \text{ nF}$  ved  $f = 1600 \text{ Hz}$

b)  $100 \Omega$  og  $400 \mu\text{H}$  ved  $f = 85 \text{ kHz}$

Det skal indskræpes, at begreberne impedans, reaktans og fasevinkel kun har mening i forbindelse med sinusformede signaler med konstant amplitude og konstant frekvens.

#### Godhed, tabsfaktor

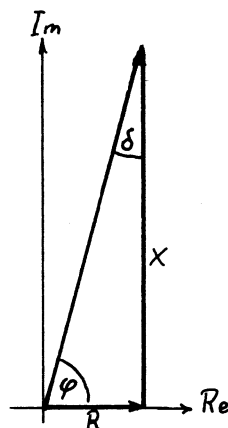
De to seneste taleksempler forudsatte ideelle komponenter. I den virkelige verden er tingene (desværre) anderledes. Tager vi for eksempel en spole, vil tråden have en ohmsk modstand. På grund af strømfortrængning og magnetisk påvirkning mellem nabovindinger, vil denne være større end DC-resistansen. Desuden vil metal i nærheden give anledning til hvirvelstrømstab. Jern eller ferrit i eller ved spolen vil derudover give hysterestab. For en spole kan vi for eksempel med en impedansmålebro måle:

$$Z = 114.4 \Omega \angle 83.1^\circ \approx 114.4 \Omega \angle 1.45 \text{ rad} = |Z| \angle \varphi$$

Det kan omregnes til

$$Z \approx 13.74 \Omega + j 113.6 \Omega$$

fig.5.32



Spolens godhedsfaktor, Q (Quality factor) findes som spolens ønskede egenskab (reaktansen) divideret med den uønskede (resistansen):

$$Q = \left| \frac{X}{R} \right| = \left| \operatorname{tg} \varphi \right| \approx 8.3$$

I mange sammenhænge angives i stedet tabsfaktoren, d:

$$d = \frac{1}{Q} = \left| \frac{R}{X} \right| = \left| \operatorname{cotangens} \varphi \right| = \operatorname{tg} \delta \text{ (tangens delta),}$$

hvor  $\delta$  (delta) er komplementvinklen til  $\varphi$  (fi)

$$\delta = 90^\circ - \left| \varphi \right|^\circ \text{ eller } \delta = (\pi/2) \text{radianer} - \left| \varphi \right| \text{radianer}$$

Traditionelt angives spolers Q og kondensatorers tg  $\delta$ . Denne irrationelle skelnen ses både i litteratur om radio- og filterteknik og i komponentkataloger.

#### Effektafsættelse i en impedans

Lad os tage en serieforbindelse af en modstand og en spole med den samlede impedans

$$Z = 50 \, \Omega + j 100 \, \Omega \approx 111.8 \, \Omega \angle 63.4^\circ$$

Vi springer let og elegant over i tidsdomænet og påtrykker impedansen en strøm på

$$i = 1 \text{ Ampere} * \sin \omega t$$

Denne strøm vil have en effektivværdi på

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{2}} * I_{\text{peak}} = \sqrt{\frac{1}{2}} * 1 \text{ A} \approx 0.707 \text{ A}$$

Over modstanden vil vi måle

$$U_R(\text{rms}) = I * R \approx 0.707 * 50 \approx 35.4 \text{ V}$$

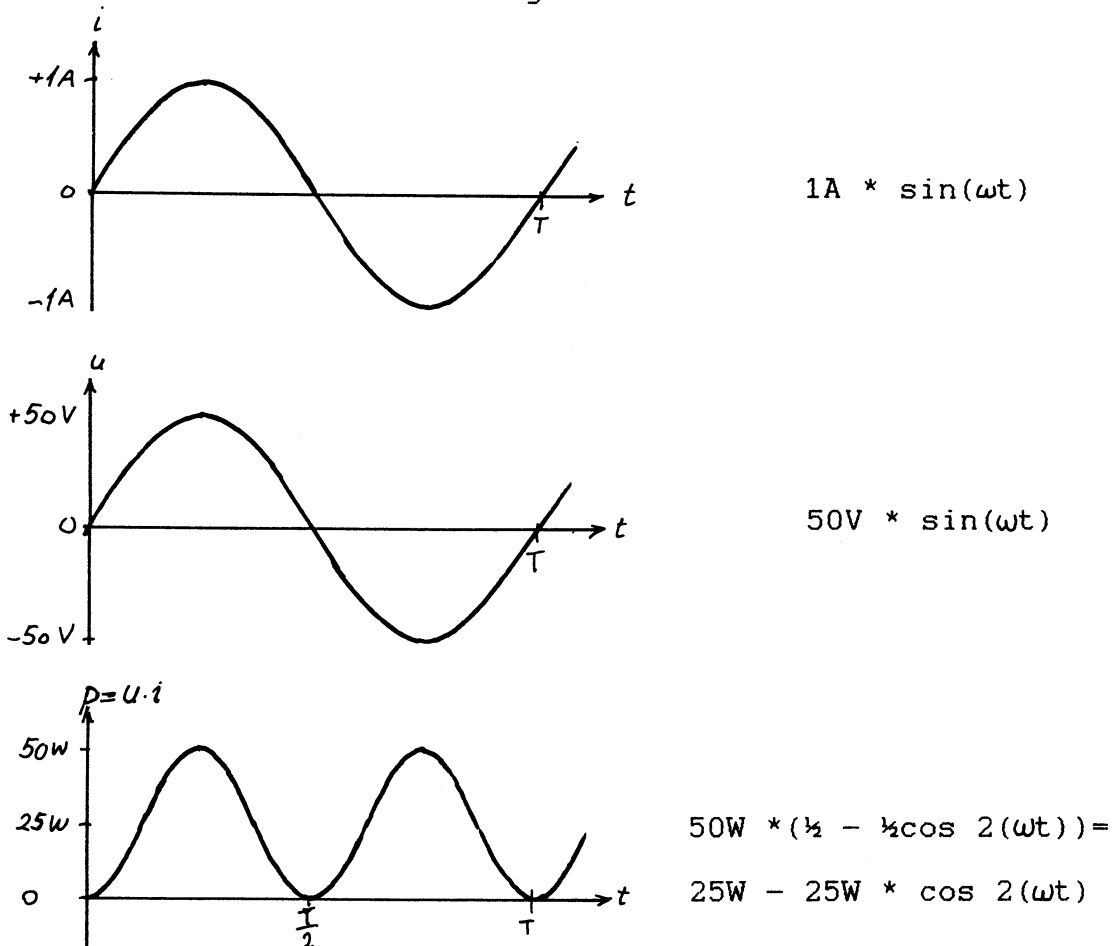
over spolen:

$$U_L(\text{rms}) = I * |X| \approx 0.707 * 100 \approx 70.7 \text{ V}$$

Over hele serieforbindelsen måles

$$U_Z(\text{rms}) = I * |Z| \approx 0.707 * 111.8 \approx 79.1 \text{ V}$$

Lad os skitsere strøm, spænding og effekt for resistansen  
fig. 5.33



Middeleffekten i modstanden bliver  $\frac{1}{2} * 50 = 25 \text{ W}$

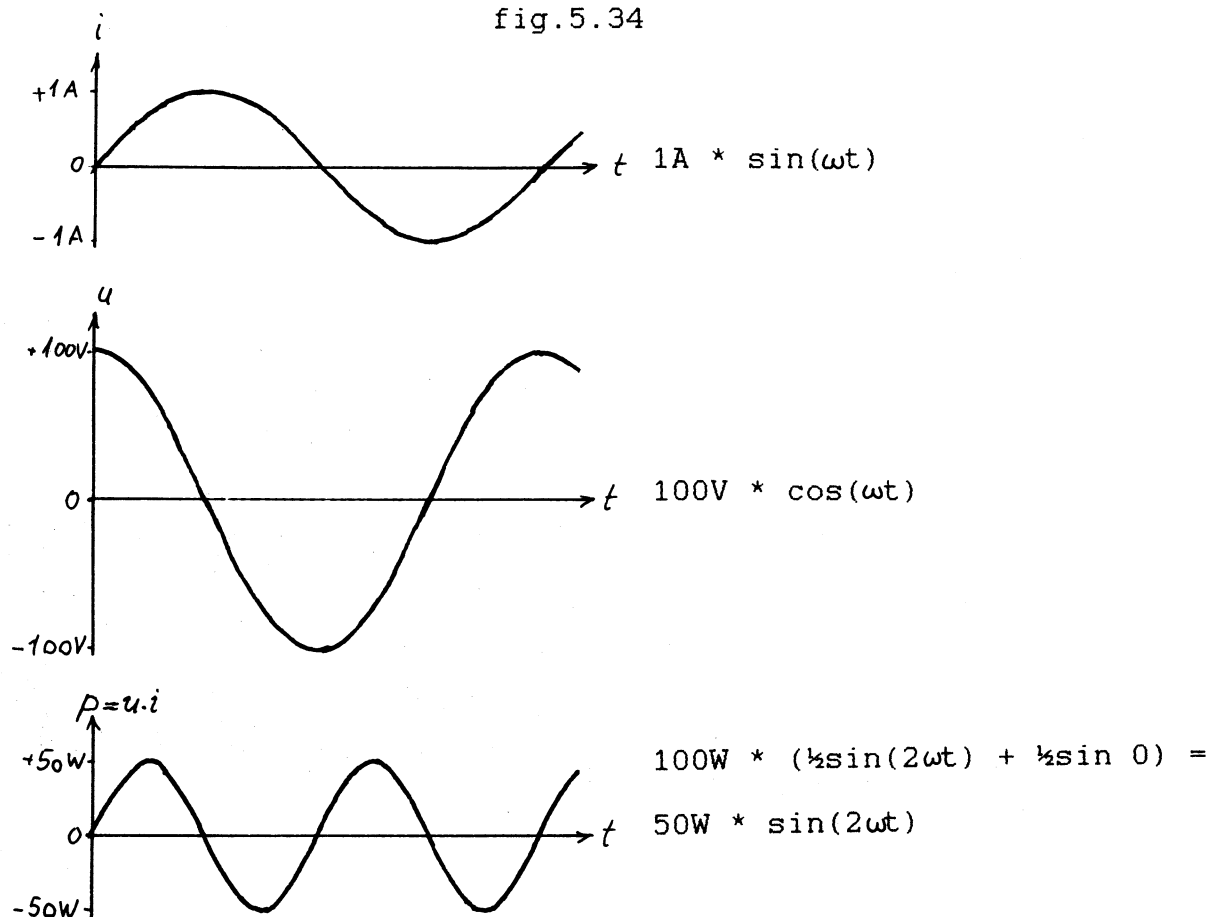
$$I_{\text{rms}} * U_{\text{rms}} \approx 0.707 * 35.4 \approx 25 \text{ W}$$

Her gik det jo præcis som det skulle: En modstand, der gennemløbes af en strøm bliver varm. Der afsættes effekt i den. Og den afsatte effekt er effektiv strøm gange effektiv spænding.

De reaktive komponenter, spoler og kondensatorer, har det tilfælles, at de kan opmagasinere og afgive energi. Lad os prøve at kigge på samme slags regnestykke (strøm, spænding,

effekt) for den induktive del af impedansen:

fig.5.34



Vi ser, at impedansens reaktive del i gennemsnit ikke forbruger effekt. Periode for periode afgiver den lige så stor energi-mængde, som den modtager. Nettoforbruget er altså et stort rundt NUL.

**Tabefrie reaktanser bruger ikke effekt!**

Hvis vi havde målt med "standardinstrumenter" på det netop gennemregnede kredsløb, ville vi have fået den tilsyneladende effekt, skin-effekten,  $S (P_s) = U_{rms} \cdot I_{rms}$ .

$$S = P_s = U_{rms} \cdot I_{rms} \approx 79.1 \text{ V} \cdot 0.707 \text{ A} \approx 55.9 \text{ VA} \\ (\text{VoltAmpere})$$

Bemærk måleenheden. Den er ikke Watt, idet tallet ikke repræsenterer en ydelse, en effekt.

En størrelse, som i nogen grad benyttes inden for stærkstrømsteknikken, er den såkaldte blindeffekt,  $Q (P_s)$ . Den repræsenterer den reaktive del af førnævnte skin-effekt:

$$Q = P_q = U_x(\text{rms}) * I(\text{rms}) \approx 70.7 \text{ V} * 0.707 \text{ A} \approx 50 \text{ VAr}$$

(VoltAmpere-reaktiv)

Det, der varmer, er de 25 Watt, som også kaldes virkeeffekten (lidt af en pleonasme = sproglig dobbeltkonfekt). Dem kan vi også finde på en anden måde:

$$P = I_{\text{rms}}^2 * R = I_{\text{rms}} * I_{\text{rms}} * R$$

$$(R = |Z| * \cos \emptyset)$$

$$P = I_{\text{rms}} * I_{\text{rms}} * |Z| * \cos \emptyset$$

$$(I_{\text{rms}} * |Z| = U_{\text{rms}})$$

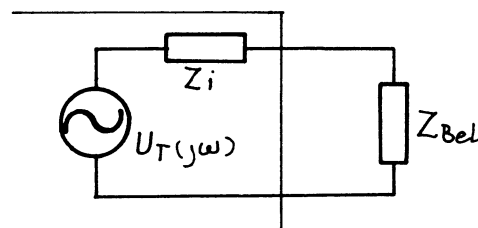
$$P = I_{\text{rms}} * U_{\text{rms}} * \cos \emptyset = I_{\text{eff}} * U_{\text{eff}} * \cos \emptyset$$

Som før nævnt: Det er denne effekt, der varmer og driver motorer, og som koster penge, når elmåleren bliver aflæst. Skin-effekten har betydning for dimensionering af el-installationer og transformere, mens blind-effekten bruges ved dimensionering af kondensatorbatterier i installationer, som ellers belaster elforsyningen stærkt induktivt (fasekompensation for store elmotorer).

### Impedanstillpasning

Især inden for radioteknikken er det ofte nødvendigt at tilpasse en kompleks belastning til en signalkilde med kompleks impedans.

fig. 5.35



Man får overført størst mulig (virke)effekt til belastningen ved "kompleks konjugeret tilpasning". det vil sige, at  $Z_{Bel} = \bar{Z}_i$  (de to impedanser er kompleks konjugerede)

$$R_{\text{Se1}} = R_i \quad \text{og} \quad X_{\text{Se1}} = -X_i$$

Det der med at skifte fortegn på reaktansen er ikke det store problem: Vi har jo både positive (spoler) og negative (kondensatorer) reaktanser at gøre godt med.

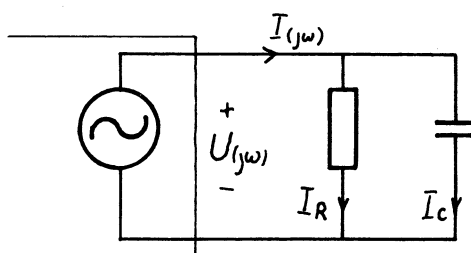
Med konjugeret tilpasning bliver udgangseffekten

$$P_{\text{ud}} = \frac{(U_{\text{Trans}})^2}{4 * R_i}$$

### Admittans

En spændingskilde (sinus) belastes med en parallellforbindelse af en modstand og en kondensator:

fig.5.36

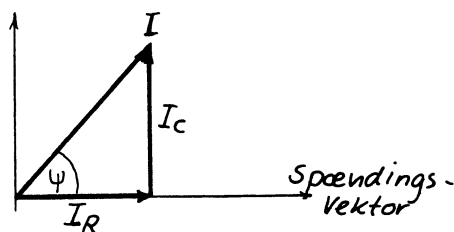


Spændingen  $U(j\omega)$  er fælles for de to komponenter, og den samlede strøm  $I(j\omega)$  findes af:

$$I(j\omega) = \vec{I}_R + \vec{I}_C = U(j\omega) * G + U(j\omega) * j\omega C$$

med vektordiagrammet:

fig.5.37



Den komplekse ledningsevne, admittansen,  $Y$ , findes af

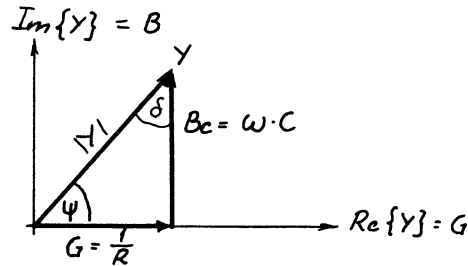
$$Y(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{U(j\omega)} = G + j\omega C \quad [\text{Siemens}]$$

Reeldelen  $G = 1/R$  kaldes konduktansen", mens imaginærdelen (her  $\omega * C$ ) kaldes susceptansen og betegnes med

bogstavet B.

$$Y = G + jB = |Y| \angle \Psi \quad (\text{vinkel psi})$$

fig.5.38



En parallellforbindelse af  $400 \, \Omega$  og  $220 \, \text{pF}$  har ved frekvensen  $4.00 \, \text{MHz}$  værdierne

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{400} = 2.50 \, \text{mS} \quad (\text{milliSiemens})$$

$$B = \omega \cdot C = 2 \pi f C = 2 \pi \cdot 4 \, \text{E}6 \cdot 220 \, \text{E}-12 \approx 5.53 \, \text{mS}$$

$$Y \approx (2.50 + j 5.53) \text{mS} \approx 6.07 \, \text{mS} \angle 65.7^\circ \approx 6.07 \, \text{mS} \angle 1.15 \, \text{rad}$$

En tilsvarende forbindelse af modstand og spole har

$$I(j\omega) = U(j\omega) \cdot G + U(j\omega) \cdot \frac{1}{j\omega L}$$

$$Y(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{U(j\omega)} = G + \frac{1}{j\omega L} = G + j \frac{-1}{\omega L}$$

Det ses, at spolen har en negativ susceptans  $B_L = -1/\omega L$ , og denne  $B_L$  er omvendt proportional med frekvensen.

#### Godhed, tabsfaktor

Også for admittanser gælder det, at godheden  $Q$  findes som imaginærdel divideret med reeldel.

$$Q = \left| \frac{B}{G} \right| = |\tan \Psi|$$

$$d = \frac{1}{Q} = |\cot \Psi| = \tan \delta$$

Når man arbejder med parallellforbundne komponenter, er det mest praktisk at beskrive dem med deres admittanser. Tilsluttede signalkilder beskrives så mest praktisk med Nortonmodeller.

I seriekredsløb er det omvendt mest praktisk at arbejde med impedanser og Theveninkilder.

Derfor kan det være nødvendigt at foretage omregning mellem en serie-impedans og den tilsvarende parallel-admittans

### Omregning

Hvis man kender en impedans, kan man regne den om til en ækvivalent admittans, idet

$$Y = \frac{I}{U} = \frac{1}{Z}$$

Lad os tage et eksempel:

En kondensator er blevet kontrolmålt ved 80 kHz. Der er blevet konstateret en seriekapacitet på 22.13 nF og en serieresistans på 16.4 Ω.

Impedansen er

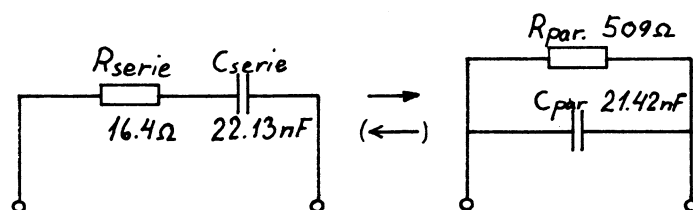
$$Z = 16.4 + j \frac{-1}{2\pi * 80E3 * 22.13E-9} \approx (16.4 - j 89.9) \Omega$$

på polær form er  $Z \approx 91.38 \Omega \angle -79.66^\circ$

$$Y = \frac{1}{Z} \approx 10.84 \text{ mS} \angle +79.66^\circ \approx 1.96 \text{ mS} + j 10.77 \text{ mS}$$

(dette er i øvrigt admittansen af en modstand på 509 Ω parallelt med en tabsfri kapacitet på 21.42 nF)

fig.5.39

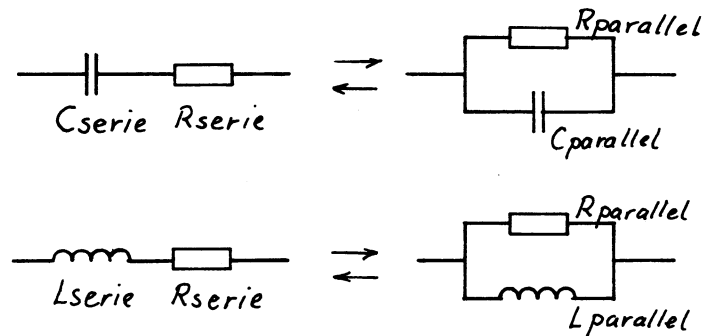


Bemærk, at denne omregning kun gælder ved denne ene frekvens (her 80 kHz). Tallene siger desuden intet om, hvorvidt tabet er serietab eller paralleltab.



Man kan desuden foretage omregning ved hjælp af godhedsfaktoren  $Q$  og tabsfaktoren  $d$ :

fig. 5.40



Her gælder omregningsformlerne:

$$C_{\text{serie}} = C_{\text{parallel}} * (1 + d^2)$$

$$L_{\text{parallel}} = L_{\text{serie}} * (1 + d^2)$$

$$R_{\text{parallel}} = R_{\text{serie}} * (1 + Q^2)$$

Det vil være en nyttig træning i bogstavregning (algebra) at forsøge selv at udlede disse sammenhænge.

En kort repetition:

Over en kondensator er spændingen  $90^\circ$  efter strømmen.

I en spole er strømmen  $90^\circ$  efter spændingen.

$$\text{Impedans } Z = \frac{I}{U}(j\omega) = R + jX = |Z| \angle \varnothing$$

$$X \text{ er reaktansen; } X_L = 2\pi fL = L; X_C = \frac{-1}{2\pi fC} =$$

$$\text{Admittans } Y = \frac{I}{U}(j\omega) = G + jB = |Y| \angle \Psi$$

$G$  er konduktansen,  $B$  er susceptansen.

$$B_C = 2\pi fC = \omega C \quad ; \quad B_L = \frac{-1}{2\pi fL} = \frac{-1}{\omega L}$$

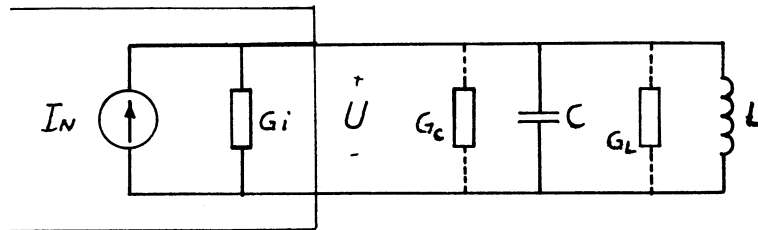
$$Q = \left| \frac{X_{\text{serie}}}{R_{\text{serie}}} \right| = \left| \frac{B_{\text{parallel}}}{G_{\text{parallel}}} \right| \quad ; \quad d = \frac{1}{Q} = \text{tg } \delta$$

Resonanskredse

Med en spole og en kondensator kan man lave kredsløb, som er "kræsne", selektive over for bestemte frekvenser.

To komponenter kan kobles i serie og i parallel. Her betragtes parallel-resonanskredsen, som er den hyppigst anvendte:

fig. 5.41



Som nævnt tidligere er det mest praktisk at benytte signalkildens Norton-model, når man regner på parallelkredsløb. For det viste kredsløb kan vi finde den samlede komplekse ledningsevne, admittansen, som:

$$Y_{\text{total}} = G_i + G_c + G_L + jB_c + jB_L$$

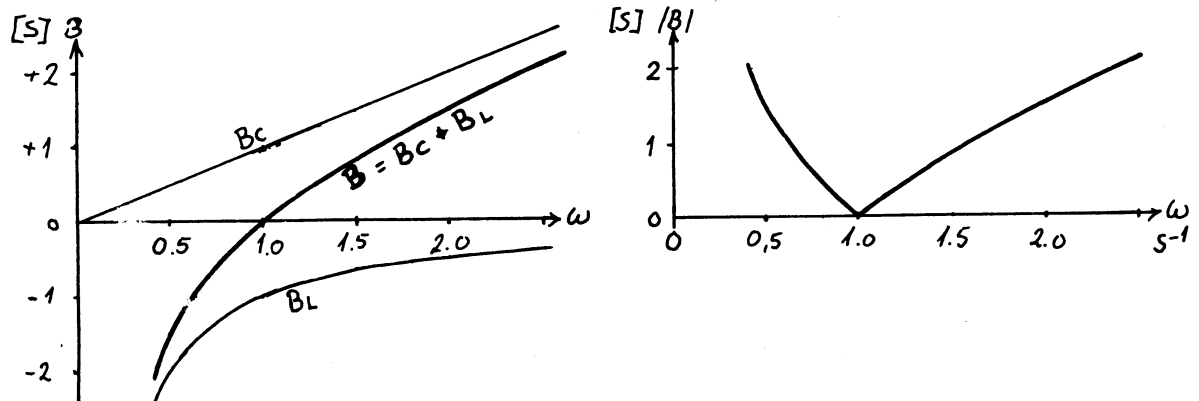
De tre konduktanser, som dels repræsenterer signalkilde og belastning/måleudstyr ( $G_i$ ), dels tabene i kondensator ( $G_c$ ) og i spole ( $G_L$ ), kan slås sammen til én,  $G_{\text{total}}$ . De to susceptanser kan også slås sammen, hvorefter vi får:

$$Y_{\text{total}} = G_{\text{total}} + jB_{\text{total}},$$

$$\text{hvor } G_{\text{total}} = G_i + G_c + G_L \text{ og } B_{\text{total}} = B_c + B_L.$$

Vi tager en "normaliseret" resonanskreds med  $C = 1$  Farad og  $L = 1$  Henry og undersøger  $B_{\text{total}}$  som funktion af  $\omega$ .

fig. 5.42



Vi ser lidt nærmere på ligningen

$$B_{\text{total}} = B_c + B_L = \omega * C + \frac{-1}{\omega L}$$

Grafen i fig. 5.42 viser, at  $B_{\text{total}}$  kan blive = 0. Vi kalder den vinkelhastighed, det sker ved,  $\omega_0$ :

$$B_{\text{total}} = 0 = \omega_0 * C - \frac{1}{\omega_0 * L}; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L * C}}$$

Da  $\omega = 2\pi f$ , fås resonansfrekvensen,  $f_0$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L * C}}$$

Der er altså en frekvens, hvor parallelkredsen slet ikke har nogen imaginær ledningsevne:

$$Y_{\text{resonans}} = G_{\text{total}} + j0 = G_{\text{total}}$$

Desuden kan vi se af fig. 5.42, at under resonans ( $\omega < \omega_0$ ) er  $B_{\text{total}}$  negativ; kredsen opfører sig som en spole (med tab). Over resonans ( $\omega > \omega_0$ ) er  $B_{\text{total}}$  positiv; kredsen opfører sig som en kondensator (med tab). Lige på resonansfrekvensen opfører den sig som en modstand med værdien

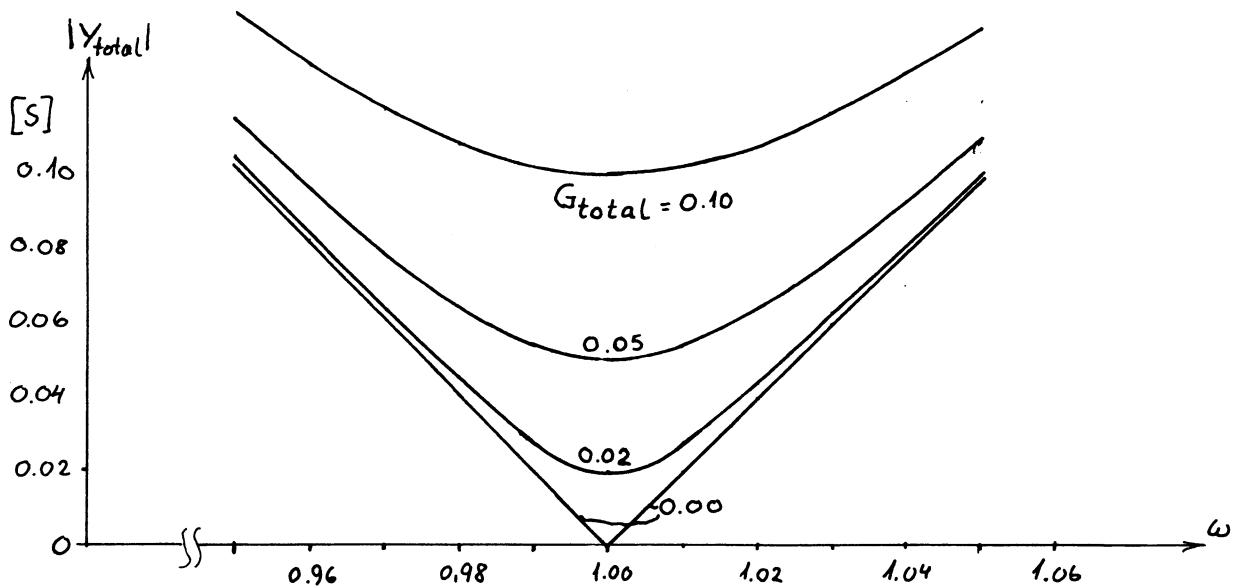
$$Z_{\text{res}} = \frac{1}{G_{\text{total}}} = \frac{1}{G_i + G_c + G_L}$$

Vi så af grafen  $|B_{\text{total}}|$ , at den har et stejlt dyk ved  $\omega_0$ . På grund af  $G_{\text{total}}$  vil  $|Y|$  dog ikke gå helt ned på 0, idet vi finder

$$|Y_{\text{total}}| = \sqrt{(G_{\text{total}}^2 + B_{\text{total}}^2)}$$

Hvis vi tager vore normaliserede værdier fra før:  $C = 1 \text{ F}$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ , kan vi prøve os frem med forskellige talværdier for  $G_{\text{total}}$  og aftegne  $|Y_{\text{total}}| = F(\omega)$  omkring det "interessante" sted  $\omega = \omega_0$ .

fig. 5.43



Vi kan se, at dykket bliver dybere, jo mindre reel ledningsevne, konduktans, der er i kredsløbet - eller sagt på en anden måde: jo højere  $Q$  kredsen har.

Kredsgodheden  $Q_{\text{kreds}}$  defineres næsten på samme måde som  $Q$  for den enkelte komponent:

$$Q_{\text{kreds}} = \left| \frac{B_{\text{resonans}}}{G_{\text{total}}} \right| ; |B_{\text{resonans}}| = \omega_0 * C = \frac{1}{\omega_0 * L} = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Den godhed,  $Q$ , vi har her, er den realistiske. Den inkluderer nemlig det eller de tilsluttede kredsløb, som LC-kredsen skal fungere sammen med.

Imidlertid ser man også begrebet "tomgangs- $Q$ ", som gælder kredsen alene, altså uden  $G$ . Det er kun ved anvendelse som spærrekreds (se senere), at denne størrelse kan bruges til noget.

Som før nævnt kan vi finde modstanden ved resonans som:

$$Z_{\text{res}} = \frac{1}{G_{\text{total}}}$$

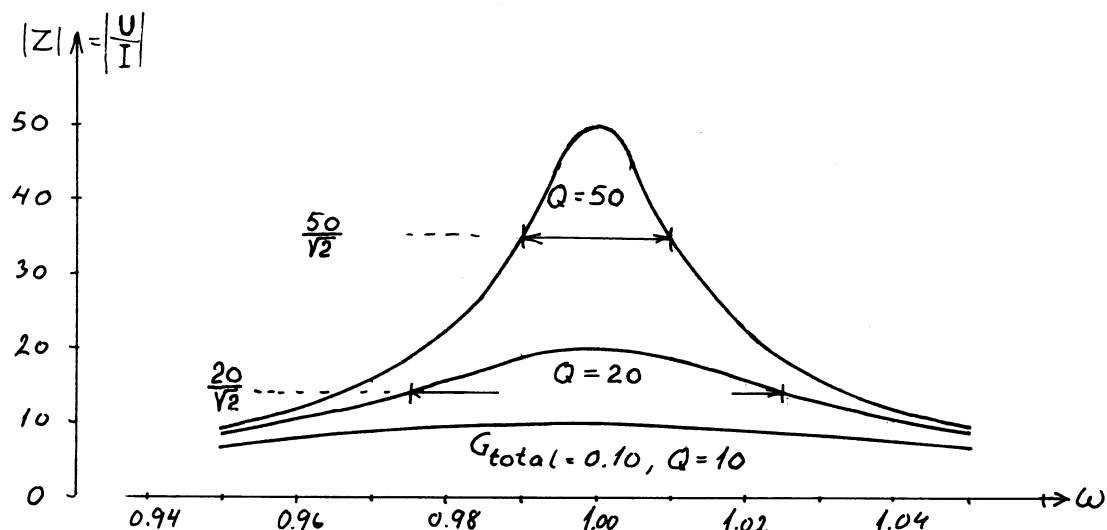
$G_{\text{total}}$  hænger jo sammen med godheden  $Q$  af de benyttede komponenter og med det/de tilsluttede kredsløb:

$$G_{\text{total}} = \left| \frac{B_{\text{resonans}}}{Q} \right| ; Z_{\text{res}} = \frac{Q}{|B_{\text{resonans}}|}$$

Kredsens evne til at udvælge, selekttere, en frekvens kommer nok mest til udtryk, når man viser  $|U/I| = F(\omega)$

$$\left| \frac{U}{I} \right|(\omega) = |Z| = \frac{1}{|Y|}$$

fig. 5.44



Udtrykket godhed (Quality factor) stammer fra radioteknikkens barndom. Som det ses af figuren, er kredsens selektivitet, evne til at skelne én frekvens (eller radio-station) fra en anden knyttet nært sammen med  $Q$ .

Strømgeneratoren i figuren vil typisk repræsentere udgangsstrømmen i et forstærkertrin med en transistor eller et integreret kredsløb, så grafen vil også afspejle trinets forstærkning som funktion af (frekvensen  $\cdot 2\pi$ ).

### Båndbredde

Impedansen og forstærkningen har et maximum ved én frekvens,  $f_0$ . Normalt accepterer man signaler, hvis amplitude er faldet med indtil 3 dB fra maximalværdien. Det svarer til, at spændingen er faldet til  $\sqrt{1/2} \approx 0.707 \cdot \text{maximum}$ .

I denne situation følges impedans og spænding ad. Det vil sige, at impedansen er faldet tilsvarende, og at admittansen (den numeriske) er vokset til  $\sqrt{2} \cdot \text{resonansværdien}$ .

Ved båndgrænserne, den øvre og den nedre grænse for den acceptable forstærkning, gælder altså:

$$|Y|_{\text{grænse}} = \sqrt{2} \cdot Y_{\text{resonans}} = \sqrt{2} \cdot G_{\text{total}}$$

$$\sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{2} * G \Rightarrow B = \pm G.$$

Dette giver 2 ligninger for  $\omega_{\text{grænse}}$ . Den løsning, som ligger højere end  $\omega_0$ , kaldes  $\omega_+$  ("omega øvre"); den anden kaldes  $\omega_-$  (læses "omega nedre").

Hvis regneudtrykkene for de to båndgrænser trækkes fra hinanden, fås

$$(3 \text{ dB}) = \omega_+ - \omega_- = \frac{G}{C} = \frac{1}{C * R_{\text{parallel}}} \quad (\text{prøv selv!})$$

Hvis  $G$  indsættes som

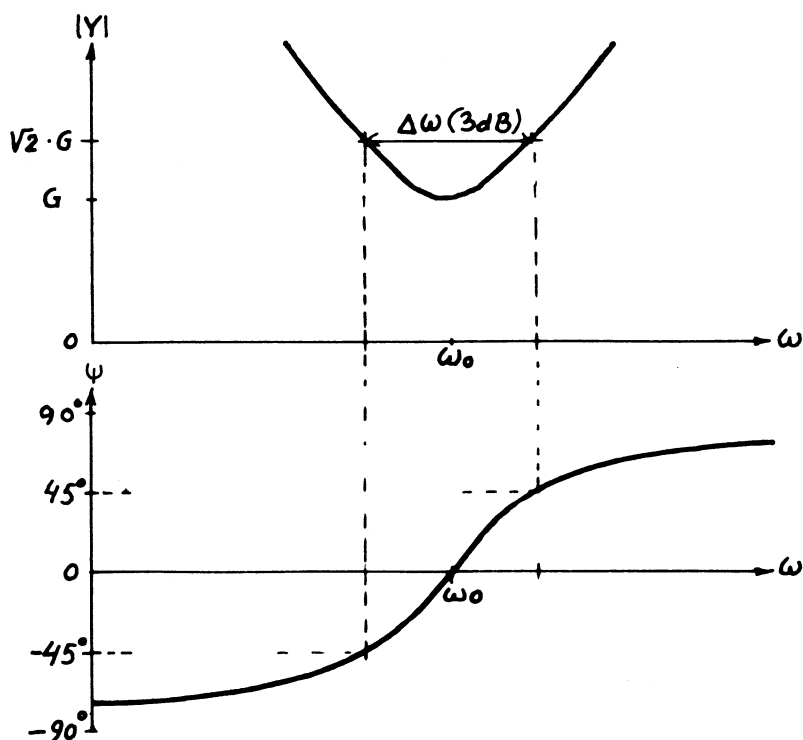
$$\left| \frac{B_{\text{resonans}}}{Q} \right| = \frac{\sqrt{C/L}}{Q},$$

fås sammenhængen:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega(3 \text{ dB})} = \frac{f_0}{f(3 \text{ dB})}; \Delta\omega(3 \text{ dB}) = \frac{\omega_0}{Q} \quad (\text{prøv selv!})$$

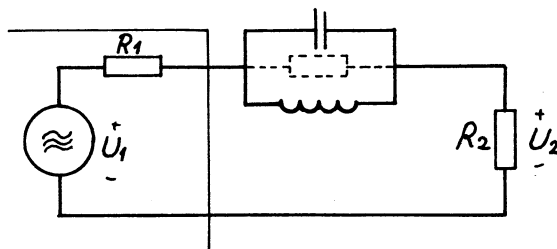
Det er tidligere nævnt, at kredsen ved lave frekvenser ( $\omega < \omega_0$ ) opfører sig som en spole med tab og over  $\omega_0$  som en kondensator med tab. Det afspejler sig også i admittansens vinkel :

fig. 5.45



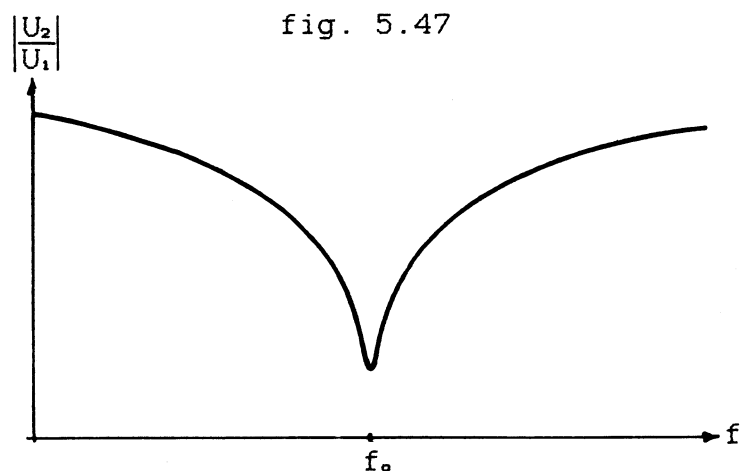
Hidtil har det været underforstået, at parallelkredsen sad parallelt over signalvejen og fremhævede én frekvens og dæmpede andre frekvenser i forhold hertil. Den kan imidlertid også placeres i serie med en signalvej:

fig. 5.46



Da kredsen udviser en høj impedans,  $Z_{res}$  (tomgang), ved resonansfrekvensen, fås en dæmpning af signalet, som er størst ved  $f_0$ :

fig. 5.47

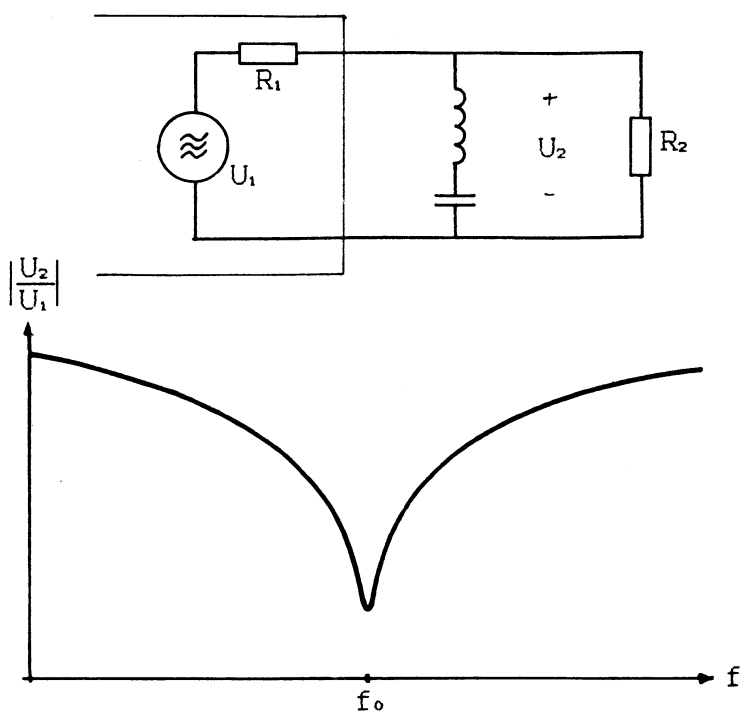


Derfor kaldes en parallelresonanskreds også sommetider en spærrekreds.

Serie-resonanskreds

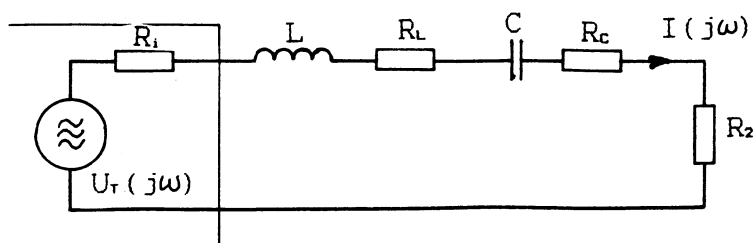
Spole og kondensator kan også arrangeres i serie, så de virker som en sugekreds:

fig.5.48



Kredsen er lettere tilgængelig for analyse, hvis den arrangeres i et seriekredsløb med en Theveninkilde:

fig.5.49



Her er spolens og kondensatorens serietabsmodstande,  $R_L$  og  $R_C$ , vist som selvstændige regnestørrelser.

Den samlede impedans i kredsløbet er

$$Z_{\text{total}} = \frac{U(j\omega)}{I(j\omega)} = R_{\text{total}} + jX_{\text{total}}$$

$$R_{\text{total}} = R_1 + R_L + R_C + R_2$$

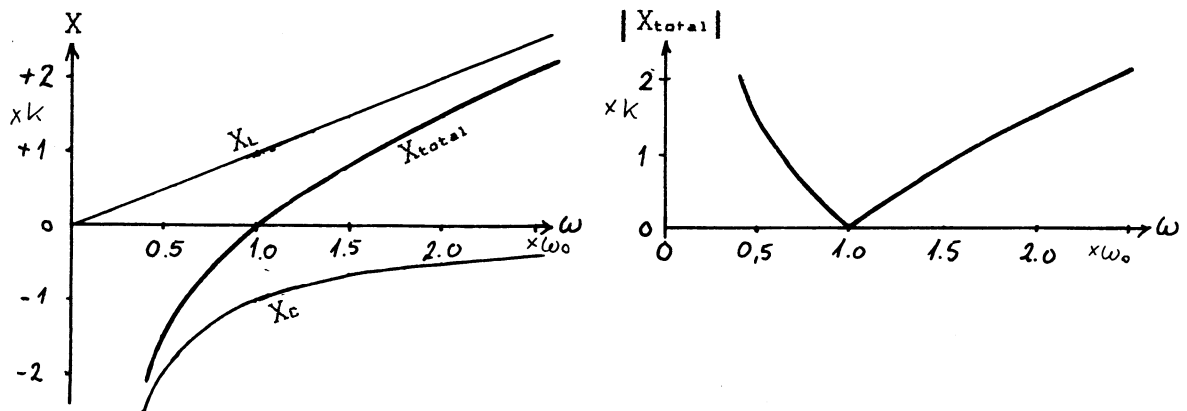
$$X_{\text{total}} = X_L + X_C = \omega L + \frac{1}{j\omega C}$$



$X_{\text{total}}$  kan blive 0 ved frekvensen

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}, \text{ hvor } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

fig.5.50



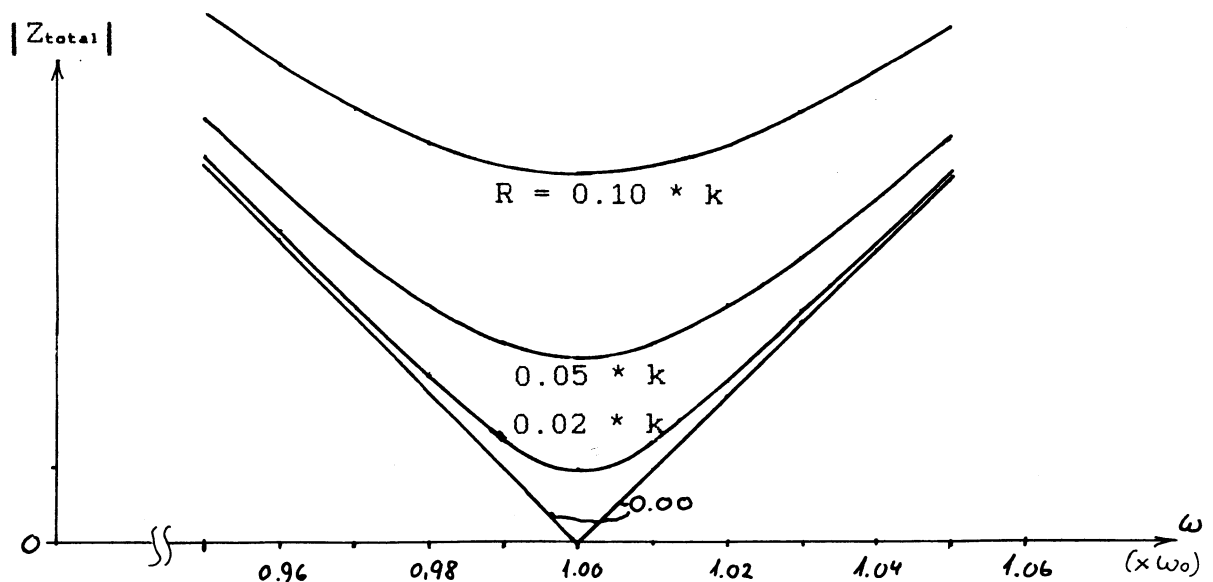
Ved resonans har L og C den numeriske resonans-reaktans,  $k$

$$k = |X_{0L}| = |X_{0C}| = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Den numeriske impedans findes som

$$|Z_{\text{total}}| = \sqrt{(R_{\text{total}}^2 + X_{\text{total}}^2)}$$

fig.5.51



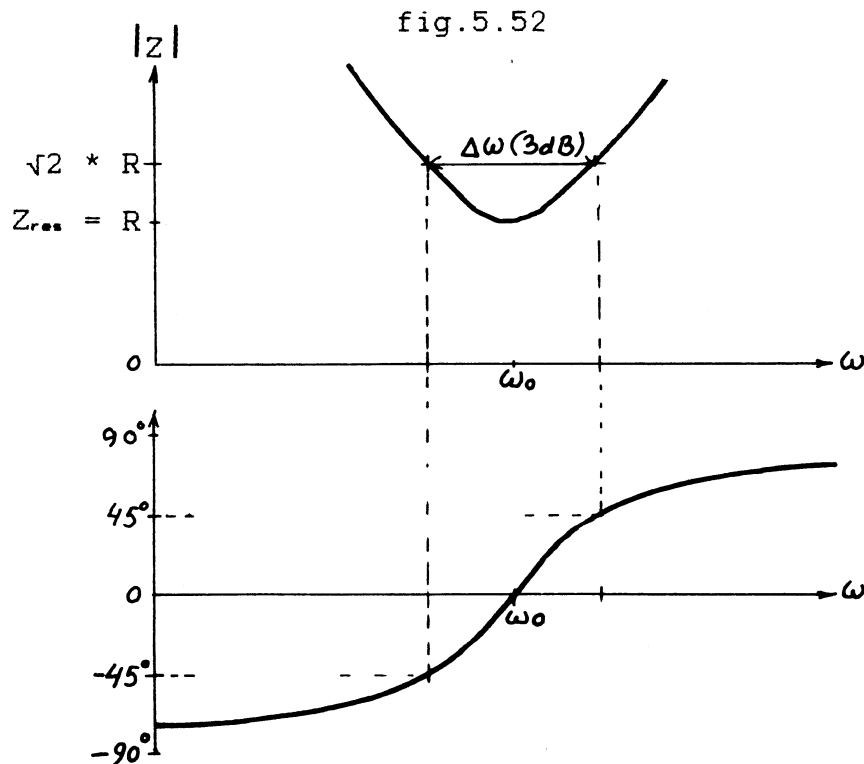
Vi ser af grafen, at dybden af resonansdykket er bestemt af den samlede seriemodstand  $R_{\text{total}}$ .

Kredsgodheden  $Q$  findes af

$$Q_{\text{kreds}} = \frac{X_{\text{resonans}}}{R_{\text{total}}} = \frac{k}{R}$$

$$Z_{\text{resonans}} = R_{\text{total}} = \frac{k}{Q}$$

Ved frekvenser under resonans ( $f < f_0$ ,  $\omega < \omega_0$ ) optræder serie-resonanskredsen kapacitivt; impedansens fasevinkel,  $\emptyset$ , er negativ. Ved resonans er den samlede reaktans nul, her optræder kredsen resistivt, det vil sige som en reel modstand. Over resonans er seriekredsen induktiv;  $\emptyset > 0$ .



3dB-båndgrænserne har vi der, hvor

$$|Z| = \sqrt{2} * Z_{\text{resonans}}; \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \pm R$$

Det giver 3dB-båndbredden:

$$\Delta\omega(3\text{dB}) = \frac{R}{L}; \Delta f(3\text{dB}) = \frac{R}{2\pi L} \text{ og sammenhængene}$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}, \Delta f = \frac{f_0}{Q}; Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Praktiske størrelsesordener

**Teoretisk** kan man til enhver ønsket resonansfrekvens vælge én af komponenterne L eller C og så beregne den anden efter:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} ; (2\pi f_0)^2 * L * C = 1 ; \omega_0^2 * L * C = 1$$

**I praksis** er der grænser for det frie valg. Især ved høje frekvenser ( $f > 10\text{MHz}$ ) kan spoler med stor selvinduktion have en så stor viklingskapacitet (med stor tabsfaktor), at beregningerne går langt ved siden af målet. Kondensatorer med stor kapacitet kan have en så lav reaktans, at seriemodstanden i deres tilledninger begrænser den opnåelige kredsgodhed, Q.

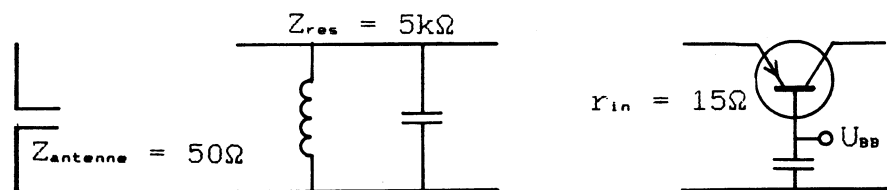
En god regel ved frekvenser over 10MHz er at undgå værdier af k (resonansreaktansen) større end  $500\Omega$  og mindre end  $5\Omega$ . Ved tonefrekvenser kan man på den anden side arbejde med k-værdier fra nogle tiendedele  $\Omega$  op til adskillige k $\Omega$ .

Disse regler gælder både serie- og parallelresonanskredse. Derimod gælder der helt specielle regler for transmissionslinie-resonatorer og hulrums-resonatorer, som bruges fra UHF og opefter ( $f > 300\text{MHz}$ ).

Resonans-transformator

De nævnte begrænsninger på k kan give problemer ved sammenkobling af parallelkredse og lavimpedante signalkilder eller belastninger.

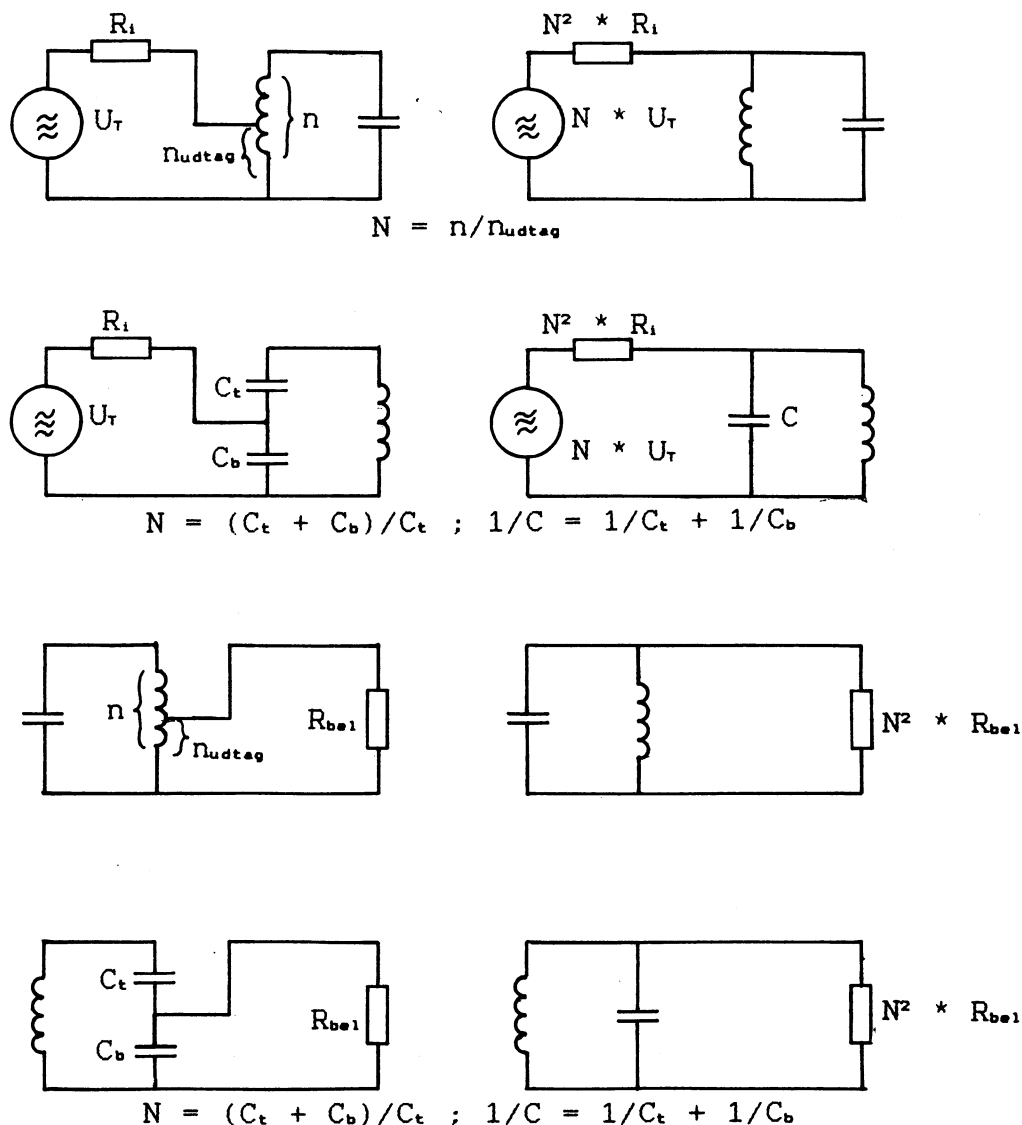
fig.5.53



Her behøves en "ideel transformator", som kan overføre den ønskede signaleffekt, selv om der ikke er impedanstilpasning.

Forudsat kredsens belastede  $Q$  holdes på 10 eller derover kan de viste kredsløb realisere den ønskede impedans-omsætning. Dette gælder dog kun i et snævert frekvensområde omkring resonans.

fig. 5.54

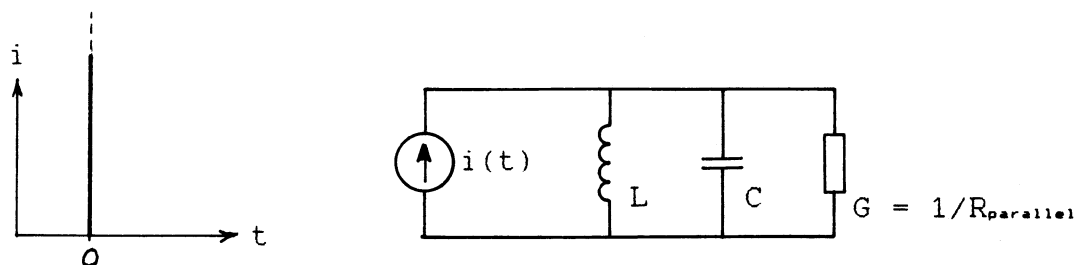


Som det fremgår af figuren, kan man lave impedansomsætning ved at tage et udtag på spolen. Udtagets vindingstal,  $n_{udtag}$  og total-vindingstallet,  $n$ , benyttes da som viklinger i en transformer. Beregningens korrekthed forudsætter dog, at der er effektiv magnetisk kobling mellem alle vindingerne, at fluxen  $\Phi$  er fælles. Det vil fungere fint ved kompakte flerlagsspoler og ved ferritkernespoler og mindre godt ved aflange étlags-cylinderspoler. Desuden kan man som vist også tage et "kapacitivt udtag" på parallelkredsen.

Resonanskredse i tidsdomænet

En parallel-resonanskreds kan tilføres en ekstremt kortvarig strøm-impuls:

fig. 5.55



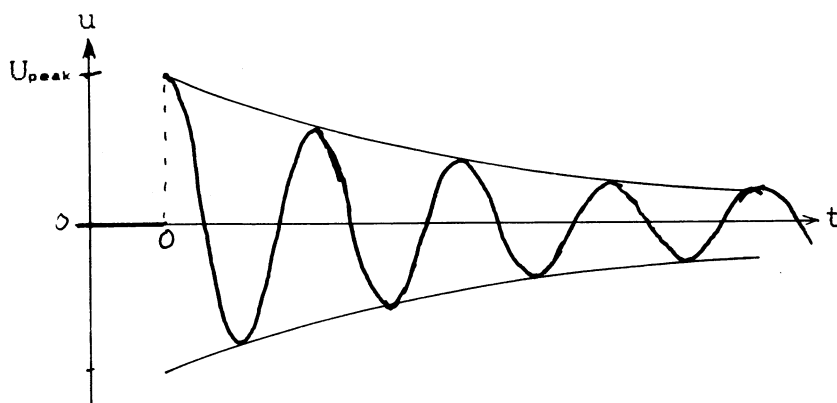
Kredsen vil reagere på denne påvirkning med en dæmpet svingning af formen

$$u(t) = U_{\text{peak}} * \cos(\omega_0 t) * e^{-t/\tau}$$

hvor  $\omega_0$  er egenresonansen for  $L$  og  $C$  (ved  $Q > 10$ ),  $\tau$  er produktet af kapacitet og parallelmodstand, og  $U_{\text{peak}}$  afhænger af impulsens ladning  $Q$  og kapaciteten  $C$ :

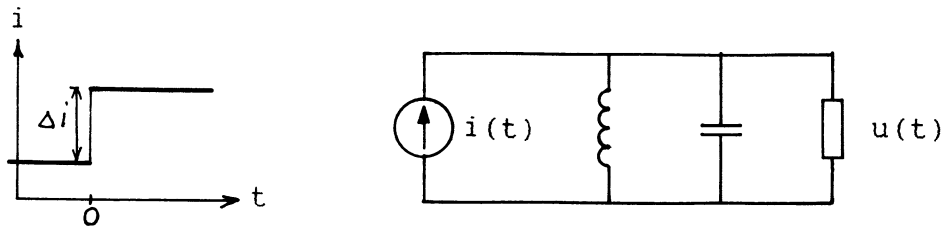
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \tau = C * R_{\text{parallel}} = \frac{C}{G}; U_{\text{peak}} = \frac{Q}{C} \left[ \frac{\text{Coulomb}}{\text{Farad}} \right]$$

fig. 5.56



Hvis kredsen tilføres et strømstep, opfører den sig på næsten samme måde:

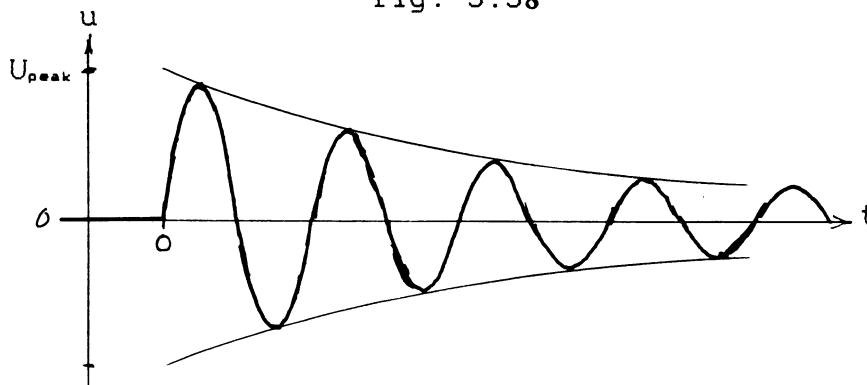
fig. 5.57



Også her vil kredsens svar (respons) være en dæmpet svingning. Her bliver den af formen:

$$u(t) = U_{\text{peak}} * \sin(\omega_0 t) * e^{-t/\tau}$$

fig. 5.58



Her vil  $\omega_0$  og  $\tau$  være bestemt af kredsløbets konstanter som før, mens amplituden bestemmes af strømsteppet og resonansreaktansen  $k$ :

$$U_{\text{peak}} = \Delta i * k = \Delta i * X_{\text{resonans}} = \Delta i * \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Denne ringning kan sammenlignes med velkendte fænomener som slag på en klokke og knips på en guitarstreng. Der får vi også en dæmpet svingning på egenfrekvensen. Dog vil musikinstrumenterne "farve" deres svingninger med hver deres karakteristiske blanding af højere harmoniske svingninger: En Amati lyder for kenderne forskelligt fra en Stradivarius.

Disse ringningsfænomener forklarer, hvorfor mange kredsløb står og "synger med", når de udsættes for brat skiftende strømme eller spændinger, som overføres direkte, induktivt eller kapacitivt.

### Vekselstrømseffekt.

Når en vekselstrøm passerer en impedans, vil der afsættes en effekt i impedansens reelle del resistansen  $R$ .

Af (40) fås:

$$P = I_{\text{eff}}^2 R \quad (192).$$

Her er

$$R = |Z| \cos \varphi \quad (193)$$

og

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{|Z|} \quad (194)$$

Idet (193) og (194) indsættes i (192) fås:

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi \quad (195),$$

eller for maximalværdierne med henvisning til (149)

$$P = \frac{1}{2} U_{\text{max}} I_{\text{max}} \cos \varphi \quad (196).$$

Sættes f.eks. vekselspænding på en tabsfri kondensator, vil der på trods af, at der løber en strøm, ikke forbruges eller afsættes nogen effekt, idet faseforskydningen mellem strøm og spænding er  $90^\circ$  og  $\cos \varphi = 0$ .

Der bruges kun, hvad der kaldes blindeffekt, og en indskudt elektricitetsmåler vil intet forbrug vise.

Enkelte steder har det interesse at tale om  $U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ , uden at korrigere for faseforskydningen, denne størrelse kaldes tilsyneladende effekt eller skin effekt.